論文審査の結果の要旨

氏 名　　沈　維 孝

論文提出者，沈 維孝は，実 1 次元力学系に関し，双曲幾何学や擬等角写像論，くりこみ理論を用いた研究を行い，C^2 位相に関する公理 A 系の稠密性を示した．

力学系の研究は Newton 以来の長い歴史をもつが，1970 年代以降の研究で明らかになってきたことは，比較的単純な力学系でさえ，非常に複雑で予測不可能な軌道を生み出し，また力学系を変化させたときに錯綜した分岐現象を引き起こすことである．その典型例は 2 次多項式 $f_a : x \mapsto ax(1-x)$ で定義される実 1 次元力学系で，この族はパラメータ a を変えるとともに，ほとんどの軌道が吸引的周期点に収束するものから完全にランダムなよう動きをするものまで，多種多様な力学系的現象が起こり，それらがパラメータ空間の中で非常に入り組んだ構造をもっていることが知られている．

実 1 次元力学系は，非自明な性質を持つ最も簡単な力学系であり，それらについて詳しく理解することは，より高次元の力学系を研究する際に，それらを記述し，理解していくための枠組みを与えてくれると期待される．それだけでなく，無限次元を含む高次元の（特に散逸的な）力学系は，しばしば中心多様体や慣性多様体により，比較的次元の低い力学系の研究に帰着されることがあり，1 次元での精密な研究がそのまま高次元での結論を導くこともある．

実 1 次元の「カオス的」力学系の研究は，Sarkovskii による周期性の間の順序関係の発見や Li-Yorke の「カオス」の概念により本格的に始まり，Milnor-Thurston の kneading theory により，位相的側面がかなり解明された．測度論的，エルゴード理論的側面については，Lebesgue 測度について絶対連続な測度をもちそれについて強い混合性をもつ場合の研究も行われ，さらに Jacobson によって，絶対連続な測度をもつパラメータ a の集合が正の Lebesgue 測度をもつという画期的な結果も得られた．また，同時に周期倍分岐の普遍性に関する Feigenbaum, Coullet-Tresser によるくりこみ理論と Lanford らによるその computer assisted proof もあった．一つの大きな転機として，Sullivan らが，くりこみの普遍性を複素解析的手法を用いて，computer を使わず，証明のメカニズムを数学として，理解できる形で与えることを提案した．これ以降，実 1 次元力学系の研究は複素力学系の理論と密接に結びついて，発展していくことになった．その後，Yocooz のくりこみ不可能なジュリア集合に関する結果や，McMullen の不変直線場の非存在に関する研究を経て，Lyubich，Graczyk-Swiatek らによって，2 次多項式族の中の公理 A をみたす力学系の稠密性が示された．公理 A をみたす実 1 次元力学系では，ほとんどの軌道は吸引的軌道に収束し，様々な面で最も理解しやすい力学系のクラスとなっている．Lyubich，Graczyk-Swiatek 方法を応用して，Kozlovski はなめらかな単峰写像（単項区間が二つだけで位相的には 2 次多項式と同様な写像）の空間の中でも公理 A をみたす力学系が稠密であることを示した．

しかしながら，この方法は単峰でない 1 次元力学系に対しては，全く適用できなかった．それは，もとをたどれば，Yocooz の理論の中で，特異点の次数が 2 次かそれ以上かによって，そのまわりの力学系的構造（例えば不動点の逆像の集積具合）が劇的に変化するからであった，したがって単峰であっても特異点の次数を 2 次以上に固定されたときには，Yocooz，Lyubich，Graczyk-Swiatek，Kozlovski の方法は通用しなくなるのであった．

論文提出者，沈 維孝は，単峰でない１次元力学系の研究の突破口として，公理Aをみたす力学系の稠密性の問題に着目し，それを C^2 位相に関して肯定的に解決した．すなわち，次の主結果である．

主定理. 公理 A をみたす力学系は C^2 級１次元力学系の中で（C^2 位相に関して）稠密である．

彼は，その証明の過程で以下に述べる数々の興味深い結果も得ている．

その証明の方針であるが，これまでに１次元力学系の研究で蓄積された様々な方法論を駆使し，それにさらにオリジナルなアイデアを付け加えている．最初のステップでは，Sullivan や van Strien-de Melo らによって開発された，区間上のポアンカレ距離の評価を用いる.（Koebe 評価とも呼ばれる.）これを用いて，特異点のまわりのくりこみ（高次の反復合成から導かれる新たな力学系）について，ある種の幾何学的なスケーリングの評価を与えた．この時点ですでに，複数ある特異点をうまく整理して，本質的に重要な状況は，大きく二つ（large bound をもつ場合と，essentially bounded geometry をもつ場合）に分けられることを示した．large bound をもつ場合には，純粋に実の方法で，C^2 摂動を構成する.（この構成は Misiurewiz らも同様のことをやっている.）

したがって，本質的に新しいのは，essentally bounded geometry をもつ場合である．この場合はまず複素解析的拡張ができるとして議論を始めてよく，このような写像で同じ組み合わせ型をもつものが二つあるとき，Sullivan らによって始められた方法により，まず擬対称共役を（もとの区間を含む）実軸上で構成できる．擬対称性によりそれは複素平面の擬等角写像に拡張でき，さらに「pull-back argument」という方法で，擬等角な共役にまでとることができる．もしここで，ジュリア集合上にサポートをもつ擬等角変形があるとすれば，何も矛盾はなく，公理 A をみたさせるような摂動の存在は保証できない．

論文提出者はここで，巧妙にとった，閉曲線のいくつかとその逆像を組み合わせることにより，この仮想的擬等角変形のサポート自体がある種の良い拡大的再帰点の列をもち，そこから（ルベーグの密度定理を用いて）擬等角変形をあたえる不変直線場は非常になめらかになることを示し，そこから矛盾を導いた.（この手法が，この学位論文の中でも最も独創的な部分である.）

いったん不変直線場の非存在が示されると，それをうまく構成した摂動の族に対して適用することにより，組み合わせ型を変えるような摂動が存在することを示した．これは，あくまでもくりこみ後の力学系に関するものであるが，これをもとの力学系まで翻訳すれば，勝手な１次元力学系に対し組み合わせ型を変えるような摂動が存在し，Milnor-Thurston の kneading theory によれば，組み合わせ型の列に対して「中間値の定理」を適用できて，公理 A をみたす摂動をえる．

論文提出者は，Koebe の評価や擬等角写像など，様々なテクニックを使いこなし，１次元力学系の重要な問題の一つを解決した．その結果のみならず，不変直線場の非存在で用いた方法は，今後他の問題の考察においても重要であると思われる．今後も彼の力学系の分野における活躍が期待される．

よって論文提出者、沈 維孝は、博士（数理科学）の学位を受けるにふさわしい充分な資格があると認める。