論文の内容の要旨

論文題目 The Euler Characteristic Formula for Logarithmic Minimal Degenerations of Surfaces with Kodaira Dimension Zero

和訳 小平次元 0 の代数曲面の対数的極小退化におけるオイラー標数公式

氏名 大野 浩司

2次元極小モデル理論に基いた小平氏による楕円曲線の退化の研究以後、曲面の退化の研究への高次元化の最初の試みとして、飯高、上野両氏による、主偏極アーベル曲面の第一種退化の研究が知られている。当時は 3 次元極小モデル理論は知られていなかったが、その後、Kulikov や Morrison 両氏は代数的 K3 曲面やEnriques 曲面の半安定退化から、解析的なカテゴリーにおける相対的極小モデルの構成し、その特異ファイバーの分類に成功した。また、Morrison, Crauder 両氏は同様な手法で非半安定の場合も考察したが、十分な結果は得られていない。射影的なカテゴリーにおいて、森、川又両氏による 3 次元極小モデル理論の確立がなされたが、半安定とは限らない、曲面の退化を考察するには、依然困難があった。非半安定退化を考える際、半安定還元を施して、得られた極小退化へ誘導される群作用を考えて、半安定の場合の結果に帰着させようとしても、一般には、そのような群作用は正則な作用ではない。これは 3 次元の極小モデルは曲面の時と異なり、一般に一意ではないという理由による。このような困難は Reid氏 によって、指摘されていた。しかしながら、Reid 氏は飯高-川又-角田氏等によって開発された曲面の対数的極小モデル理論を援用し、楕円曲線の IV 型の退化の例をとり、特異ファイバーの台を境界として、十分な特異点解消した後、対数的極小モデルをとると、得られた退化の特異ファイバーは半安定退化の場合に近い、良いふるまいをしていることに注意した。 ここで、$g : Y \to \mathcal{D}$ を非特異な 3 次元複素解析的空間から、1 次元複素円板 $\mathcal{D} := \{z \in \mathbf{C} |\ |z| < 1\}$ への

連結かつ射影的な正則写像で、$\mathcal{D}^* := \mathcal{D} \setminus \{0\}$ 上非特異とする。また、任意の $t \in \mathcal{D}^*$ に対して、$Y_t := g^*(t)$ は小平次元 0 の曲面、特異ファイバー $g^*(0)$ の台は各成分が非特異で、高々単純正規交叉しか特異点としてもたないとする。対数的 3 次元複素解析的空間 $(Y, g^*(0)_{\mathrm{red}})$ に近年、Shokurov 氏により、完成された対数的 3 次元極小モデルプログラムを $\mathcal{D}$ 上に相対的に適用する。これは、g が半安定のときは、通常の極小モデルプログラムを適用することと、同じことである。このようにして得られた新しい退化 $f : X \to \mathcal{D}$ を小平次元 0 の曲面の対数的極小退化と呼ぶことにする。対数的極小退化は半安定還元から得られる極小退化に変換群が正則に作用すると仮定したときの商とほぼ同様の役割をもっている。$\Theta := f^*(0)_{\mathrm{red}}$ とおいて、$\Theta = \sum_i \Theta_i$ を既約分解とすると、各 Θ_i は正規で、成分の交わり方も正規交叉に近い性質をもつ。$\mathrm{Diff}_{\Theta_i}(\Theta - \Theta_i) := K_X + \Theta|_{\Theta_i} - K_{\Theta_i}$ によって different と呼ばれる $\mathbf{Q}$-係数の境界 $\mathrm{Diff}_{\Theta_i}(\Theta - \Theta_i)$ が定まり、各既約成分の係数は $\{(n-1)/n \mid n \in \mathbf{N} \cup \{\infty\}\}$ の元であることがわかる。一般にこのような $\mathbf{Q}$-係数の境界を標準的境界という。以後 $\Delta_i := \mathrm{Diff}_{\Theta_i}(\Theta - \Theta_i)$ と略記する。また対数的曲面 (Θ_i, Δ_i) は対数的末端的であり、対数的標準因子 $K_{\Theta_i} + \Delta_i$ は数値的零である。このような対数的曲面の構造解明が、退化の研究に重要であるが、これらの対数的曲面は有界ではなく、従って、特異性も制御出来ないという困難に突き当たる。しかしながら、特異ファイバーの成分として現れる対数的曲面にはある種の制限が加わっていることを示しているのが、本論文の主定理の一つである、次のオイラー標数公式である。小平次元 0 の対数的極小退化 $f : X \to \mathcal{D}$ の対数的標準因子 $K_X + \Theta$ は 0 に$\mathbf{Q}$-線形同値であり、大域的に対数的標準被覆をとることによって、$K_X + \Theta$ が 0 に線形同値 (特に、Cartier) である場合に帰着されることに注意しておく。

定理 1. $f : X \to \mathcal{D}$ を小平次元 0 の代数曲面の対数的極小退化とし、$K_X + \Theta$ は Cartier であると仮定する。$f^*(0) = \sum_i m_i \Theta_i$ を既約分解とすると、$t \in \mathcal{D}^*$ に対し，次の式が成立する。

$$e_{\mathrm{top}}(X_t) = \sum m_i (e_{\mathrm{orb}}(\Theta_i \setminus \Delta_i) + \sum_{p \in \Theta_i \setminus \Delta_i} \delta_p(X, \Theta_i)).$$

ここで、$e_{\mathrm{top}}(X_t)$ は $X_t := f^*(t)$ のオイラー数, $e_{\mathrm{orb}}(\Theta_i \setminus \Delta_i)$ は $\Theta_i \setminus \Delta_i$ のオービフォールドオイラー数 そして $\delta_p(X, \Theta_i)$ は点 p における対 (X, Θ_i) の特異点の計算可能な不変量である。

次にここでいくつかの記法を導入しておく。

G を有限群、$\rho : G \to \mathrm{GL}(3, \mathbf{C}^3)$ を忠実な表現とする。$\mathbf{C}^3/(G, \rho)$ を ρ で定義される G の $\mathbf{C}^3$ への作用による商とする。但し、商写像 $\mathbf{C}^3 \to \mathbf{C}^3/(G, \rho)$ は余次元 1 で不分岐と仮定し、原点の像における特異点 $\mathbf{C}^3/(G, \rho)$ の局所基本群が G と同型となるようにし

ておく。正規複素解析的空間 X と被約な X 上の因子 D との対 (X,D) が 点 $p\in X$ において $V_1(G,\rho)$ (resp. $V_2(G,\rho)$) 型の特異点を持つとは、特異点の芽の間の解析的同型写像 $\varphi:(X,p)\to(\mathbf{C}^3/(G,\rho),0)$ と方程式 $z=0$ (resp. $xy=0$) で定義される$\mathbf{C}^3$ 内の超曲面 H (但し、x, y と z は (G,ρ) の作用において、半不変な $\mathbf{C}^3$ の基底とする。) があって、$D=\varphi^*(H/(G,\rho))$ となるときをいう。特に G が $\sigma\in G$ を生成元とする巡回群で $(\rho(\sigma)^*x,\rho(\sigma)^*y,\rho(\sigma)^*z)=(\zeta^a x,\zeta^b y,\zeta^c z)$ (但し、a, b, $c\in\mathbf{Z}$, ζ は 1 の原始 r 乗根 で x, y, z は $\mathbf{C}^3$ のある基底) であるとき $V_1(G,\rho)$ (resp. $V_2(G,\rho)$) の代わりに $V_1(r;a,b,c)$ (resp. $V_2(r;a,b,c)$) と書くことにする。

定理 1 の公式に現れる δ_p は $\mathbf{Q}$-Gorenstein 3 次元正規複素解析的孤立特異点の芽 (X,p) と p を通る被約な X 上の因子 S との対 (X,S) が標準的特異点しか持たないときに 対 (X,S) に対して定義され、次の性質を持つ。

命題. 不等式 $\delta_p(X,S)\geq 0$ が成立する。また、$\delta_p(X,S)=0$ であるためには、点 $p\in S\subset X$ において、(X,S) が $V_1(r;a,-a,1)$ 型の特異点のみを持つことが必要十分である (但し、$(r,a)=1$)。

定理 1 に命題と Bogomolov-Miyaoka-Yau 型不等式を用いると、系として次が得られる。

系. $t\in\mathcal{D}^*$ に対して、$e_{\mathrm{top}}(X_t)=0$、即ち、X_t はアーベル曲面か、または超楕円曲面 と仮定する。このとき、任意の i に対して, $e_{\mathrm{orb}}(\Theta_i\setminus\Delta_i)=0$ が成立し、任意の点 $p\in\Theta_i\setminus\Delta_i$ において、(X,Θ) は $V_1(r;a,-a,1)$ 型の特異点しか持たない (但し、$(r,a)=1$)。

上記の結果の応用を論じる前に I 型、II 型そして III 型と呼ばれる退化の型を定義しておく。即ち、小平次元 0 の対数的極小退化 $f:X\to\mathcal{D}$ の特異ファイバーは大まかに次の 3 つの型に分かれる。

I : Θ は $\lfloor\Delta_i\rfloor=0$ なる成分 Θ_i を持つ。

II : Θ は $\lfloor\Delta_i\rfloor\neq 0$ かつ $\lfloor\mathrm{Diff}_{\lfloor\Delta_i\rfloor^\nu}(\Delta_i-\lfloor\Delta_i\rfloor)\rfloor=0$ なる成分 Θ_i を持つ。

III : Θ は $\lfloor\Delta_i\rfloor\neq 0$ and $\lfloor\mathrm{Diff}_{\lfloor\Delta_i\rfloor^\nu}(\Delta_i-\lfloor\Delta_i\rfloor)\rfloor\neq 0$ なる成分 Θ_i を持つ。

但し、ここで、$\lfloor\Delta_i\rfloor$ は Δ_i の被約部分を表し、$\nu:\lfloor\Delta_i\rfloor^\nu\to\lfloor\Delta_i\rfloor$ は $\lfloor\Delta_i\rfloor$ の正規化を表すものとする。

定理 1 の系の応用として、本論文の第二の主定理である次の定理が示される。

定理 2. $f: X \to \mathcal{D}$ をアーベル曲面か、または超楕円曲面の対数的極小退化とする。任意の点 $p \in \Theta \subset X$ における (X, Θ) の特異点の型は次のいずれかである。

(0) 点 $p \in X$ において、X は非特異かつ Θ は高々、正規交叉特異点しか持たない。

(1) (X, Θ) は点 $p \in X$ において、$V_2(r; a, b, 1)$ 型特異点しか持たない（但し、$r \in \mathbf{N}$, $a, b \in \mathbf{Z}$ で、$(r, a, b) = 1$）。

(2) (X, Θ) は点 $p \in X$ において、$V_1(G, \rho)$ 型特異点しか持たない。

さらに詳しく、f が II 型ならば、(1) において、$r = 2, 3, 4$ または 6 で、(2) において、$G \simeq \mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ または、$\mathbf{Z}/2\mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$（但し, $n = 2, 3, 4$ または 6）。Θ の双対グラフは直線的鎖か、サイクルである。さらに、3 次元正規複素解析的空間 X^μ への $\mathcal{D}$ 上の 射影的正則写像 $\psi: X \to X^\mu$ があって、誘因された退化 $f^\mu: X^\mu \to \mathcal{D}$ に関して、$K_{X^\mu} \sim_{\mathbf{Q}} 0$ かつ $f^{\mu *}(0) = m\Theta^\mu$（但し、$\Theta^\mu := \psi_* \Theta$, $m \in \mathbf{N}$）。さらに、(X^μ, Θ^μ) の特異点の可能な型と Θ^μ の双対グラフは変わらない（しかしながら、特異ファイバーの既約成分の正規性は保たれない可能性はある）。また、f が III 型ならば、(1) において、$r = 2$ であり、(2) は次の 3 つの型に還元される。

(III-2.1) (X, Θ) は点 $p \in X$ において、$V_1(r; a, -a, 1)$ 型特異点しか持たない（但し、$r = 2, 3, 4$ または 6 で、かつ $(r, a) = 1$）。

(III-2.2) (X, Θ) は点 $p \in X$ において、$V_1(2; 1, 0, 1)$ 型特異点しか持たない。

(III-2.3) (X, Θ) は点 $p \in X$ において、$V_1(G, \rho)$ 型特異点しか持たない。但し、$G \simeq \mathbf{Z}/2\mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$ であり、$\{\sigma, \tau\}$ を G の生成元とすると、

$$\rho(\sigma) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \rho(\tau) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

特に、f が III 型ならば、X は標準特異点しか持たない。