論文審査の結果の要旨

氏名 大野 浩司

論文提出者 大野 浩司 は, 小平次元が 0 であるような代数曲面の 1 パラメーター族を研究した. これは, 小平邦彦氏による楕円曲面, すなわち楕円曲線の 1 パラメーター族の理論の高次元化を目指したものである. 楕円曲面論は曲面論の重要な 1 章であり, その高次元化は必然的である.

大野氏は次のような設定から出発した. 滑らかな 3 次元代数多様体 X から滑らかな代数曲線 C への全射射影的正則写像 $f: X \to C$ で, 一般ファイバー X_t の小平次元が 0 であるようなものを考える. このとき, X_t は次のいずれかの代数曲面 (X_t の極小モデル) と双有理同値になることが知られている: $K3$ 曲面, アーベル曲面, エンリケス曲面, または超楕円曲面.

従来の手法では, X に C 上相対的な極小モデルプログラムを適用し, 極小族 $f': X' \to C$ を作り, これを研究した. X' は $\mathbb{Q}$-分解的な末端特異点のみを持つ 3 次元多様体で, f' の一般ファイバー X'_t は X_t の極小モデルと一致する. 小平曲面論では f' のファイバーを考察したが, 3 次元ではこれは複雑すぎる.

そこで, 大野氏はその代わりとして対数的極小モデルを考えることにした. f が滑らかな射にならないような X 点の f による像全体のなす集合を Σ とおく. Σ は C の有限集合であり, $t \in \Sigma$ に対するスキーム論的ファイバー $X_t = f^{-1}(t)$ は特異ファイバーと呼ばれる. $B = f^{-1}(\Sigma)_{\mathrm{red}}$ とおき, 対 (X, B) に C 上相対的な対数的極小モデルプログラムを適用すると, 対 (X'', B'') と対数的極小族 $f'': X'' \to C$ を得る. ここで, X'' は $\mathbb{Q}$-分解的であり, 対 (X'', B'') は弱対数的末端特異点のみを持つ. f'' にはまだ余分な例外因子があり得るので, これらをつぶすとさらに有用なモデルを得る. すなわち, 対数的極小モデルプログラムを工夫して使うと, 対 (X''', B''') と対数的強極小族 $f''': X''' \to C$ を得る. ここで, X''' は $\mathbb{Q}$-分解的であり, 対 (X''', B''') は対数的標準特異点のみを持ち, 特異ファイバー $f'''^{-1}(t)$ $(t \in \Sigma)$ の各既約因子は同じ重複度を持つようにできる. f''' の一般ファイバーはもちろん X'_t と同じである.

まず, 大野氏は対数的極小族 $f'' : X'' \to C$ の特異ファイバー上の各点 p に対して, 計算可能な不変量 $\delta_p(X'', S)$ を定義した. ここで, S は p を通る特異ファイバーの既約成分である. この量は次の性質を持つ:

命題 1. 不等式 $\delta_p(X'', S) \geq 0$ が成り立つ. さらに, 等号は, X'' が p において $\mathbb{C}^3/\mathbb{Z}_r(a, -a, 1)$ 型の商特異点を持ち, 商特異点としての解析的局所座標において S が座標平面の像になっている場合に限って成り立つ.

この論文の主要結果は以下の定理である.

定理 2. $K_{X''} + B''$ がカルティエ因子であるならば, 任意の特異ファイバー $X''_t = \sum_i m_i S_i t \in C$ に対して, 次の公式が成立する:

$$e_{top}(X''_t) = \sum_i m_i \{e_{orb}(S_i \setminus C_i) + \sum_{p \in S_i \setminus C_i} \delta_p(X'', S_i)\}.$$

応用として大野氏は次の結果を得た.

定理 3. 一般ファイバーがアーベル曲面かまたは超楕円曲面であるならば, X'' は高々商特異点のみを持つ.

これらの結果はファイバー構造を持つようなカラビヤウ多様体の研究に重要な手段を提供する.

よって, 論文提出者 大野 浩司 は, 博士 (数理科学) の学位を受けるにふさわしい充分な資格があると認める.