論文の内容の要旨

論文題目 The monopole equations and J-holomorphic curves on weakly convex almost Kahler 4-manifolds

弱凸な概ケーラー多様体上のモノポール方程式と擬正則曲線

氏名　　神田 雄高

0. Introduction.

モノポール方程式は、4 次元の有向リーマン多様体 (X,g) に対して、スピン C 構造をひとつ選ぶごとに定義される方程式である。X が閉ならば、解のモヂュライ空間はコンパクトである。そして X の自己双対な調和 2 形式の次元 $b_2^+(X)$ が 2 以上ならば、X の有向可微分多様体としての不変量をモヂュライ空間の位相から定義できる。これを X のサイバーグ＝ウイッテン（略して SW）不変量とよぶ。

さて、シンプレクチック多様体 (X,ω) に対して ω と適合的な概複素構造 J を一つ固定したとき、組 (ω,J) を X の概ケーラー構造と呼ぶ。$h\in H^2(X,Z)$ をひとつ取ろう。J に関する非特異な擬正則曲線 D であって $[D]=h$ となるもの全体のなすモヂュライ空間 $\mathcal{M}(h)$ は、X が閉ならば良いコンパクト化 $\widetilde{\mathcal{M}}(h)$ を持つ。$\widetilde{\mathcal{M}}(h)$ とそれに付随する評価写像 ev を考え合わせることによりグロモフ＝ウイッテン（略して GW）不変量が定まる。これは概複素構造の選び方によらず、(X,ω) のみに依存する。X が開の場合も、与えられた概ケーラー構造がエンドである種の凸性を持てば、GW 不変量が全く同様に定義できる。ただし凸性は概複素構造の取り方で決まる性質なので、一般には (X,ω) のみの不変量でない可能性がある。

一方、クロンハイマー＝ムロフカは、エンドが錐的であるような有向 4 次元多様体

について、エンドに「良い凸性」を持つ概ケーラー構造を置いたとき、モノポール方程式のモヂュライ空間がコンパクトになるような境界条件の設定を与え、SW 不変量の定義を拡張した。この不変量はエンドの概ケーラー構造に強く依存するため、3 次元接触幾何への深い応用がある。

さて、4 次元概ケーラー多様体 (X, ω, J) 上のモノポール方程式は微分形式とドルボー作用素の言葉で書き下すことができる。さらにもし J が複素構造ならば、比較的容易な議論より解のモヂュライが効果的因子たちと 1 対 1 の対応にあることが示せる。

タウベスは上の観察に基づき、閉 4 次元シンプレクチック多様体で b_2^+ が 2 以上のものに対して、その SW 不変量と GW 不変量が等価であることを示した。

SW 不変量が零でない時に、対応する擬正則曲線の存在を導く彼の議論では、まずシンプレクチック形式 ω で摂動したモノポール方程式から出発し、それを正係数 r でどんどんリスケールすることを考える。これは概ケーラー構造の定めるリーマン計量を r 倍することと同じである。モノポール方程式の変数は正の半スピノル束 W^+ の切断および直線束 $det(W^+)$ の $U(1)$ 接続の組からなるが、r を無限大に飛ばした時、解の $U(1)$ 接続の曲率がディストリビューションとしてある擬正則曲線 D に収束することが示される。D のホモロジー類はその出自から明らかにように、$c_1(det(W^+))$ のポアンカレ双対である。

本論文の主目的は、4 次元概ケーラー多様体が「弱凸」(weakly convex) である時、クロンハイマー＝ムロフカの境界条件を課したモノポール方程式を考え、この状況下に今述べたタウベスの議論を拡張することである。ただし、「弱凸」性はクロンハイマー＝ムロフカの意味での凸性 (漸近的平坦性) よりやや強い条件である。

またその応用として、複素 2 次元の単純特異点の「境界」として得られる 3 次元コンタクト多様体について、それを凸な境界とするようなコンパクト 4 次元シンプレクチック多様体 (X_0, ω) の位相には強い制約が伴うことを示す。すなわち、(X_0, ω) の交差形式は負定値、カノニカル直線束 K_ω は自明である。

1. 解析的な設定および主定理

以下、(X, ω, J) を完備な 4 次元概ケーラー多様体とする。L を X 上の複素直線束であって、十分大きなコンパクト集合の外で定まった自明化 ϱ を持つものとする。この時、次のようなモノポール方程式を考える。ただし、r は 1 以上の実定数とする。

$$\begin{aligned}
&\overline{\partial}_a \alpha + \overline{\partial}_a^* \beta = 0 \\
&F_a^{0,2} = \frac{r}{4} \alpha^* \beta \\
&\langle F_a, \omega \rangle = \frac{\sqrt{-1} r}{4} (-1 + |\alpha|^2 - |\beta|^2)
\end{aligned}$$

変数 (α,β,a) はアファイン空間 $\Omega^{0,0}(L)\times\Omega^{0,2}(L)\times\mathcal{A}(L)$ の元である。ただし、$\mathcal{A}(L)$ は L の $U(1)$ 接続全体、F_a は a 曲率形式。この空間への $Map(X,U(1))$ の自然な作用は方程式を不変に保つ。

この方程式は元 $(1,0,d)$ (dは自明な接続) を Lが自明な場合の解として持つことに注目せよ。我々の関数空間としては、$\Omega^{0,0}(L)\times\Omega^{0,2}(L)\times\mathcal{A}(L)$ の元であって、解 $(1,0,d)$ との差がコンパクト台を持つものたちの成す部分空間を、$p=2$ の k 階ソボレフ・ノルムに関して完備化したものを採用する。同様にゲージ群については、$Map(X,U(1))$ の元であって、十分大きなコンパクト集合の外では $1\in U(1)$ と一致するものたちの成す集合を、$p=2$ の $k+1$ 階ソボレフ・ノルムで完備化したものを用いる。これを境界条件として見れば、自明な解 $(1,0,d)$ および自明なゲージ変換にソボレフ・ノルムの意味で漸近するよう要請した事になる。ただし、kは十分大きく取っておく。

[K-M2] で示されたことは、(X,ω,J) が「漸近的に平坦」であるならば、解空間をゲージ群の作用で割った商空間 $\mathcal{M}(L,\varrho,r)$ がコンパクトな有限次元ハウスドルフ多様体になることである。次元は組 (L,ϱ) のチャーン類 $c_1(L,\varrho)$ で決まり、特に (L,ϱ) が自明なとき零に等しい。ただし Lは十分大きなコンパクト集合の外で自明化 ϱ を持つから、$c_1(L,\varrho)\in H^2_{cpt}(X,Z)$ と見なしている。

「主定理」 (X,ω,J) が弱凸とする。正の発散実数列 $\{r_n\}$ に対してモヂュライ空間の点列 $\{([\alpha_n,\beta_n,a_n],r_n)\in\mathcal{M}(L,\varrho,r_n)\}$ が与えられた時、適当な部分列をとると、集合列 $\{\alpha_n^{-1}(0)\}$（α_n による零切断の逆像）はハウスドルフ位相の意味であるコンパクトな擬正則曲線 D に収束する。ただし D の各既約成分は被約とは限らず、重複度こみで $c_1(L,\varrho)$ のポアンカレ双対になる。（ここで $[*]$ は $*$ のゲージ同値類の意味）

2. 主定理の証明

$Z_n:=\{x\in X\mid |\alpha_n|^2<\frac{1}{2}\}$ とおく。

少なくとも X がコンパクトな場合、r_n を無限大に飛ばすと Z_n はある擬正則曲線 D にハウスドルフ位相の意味で収束し、$|\alpha_n|^2$ は $X\backslash D$ 上で 1 に広義一様収束することが、すでに [T1] で分かっている。

一方 (X,ω,J) が弱凸とすると、[K-M2] の議論から、r_n と (ω,J,L,ϱ) のみに依存するコンパクト集合 K_n であって $Z_n\subset K_n$ となるものが存在し、各切断 α_n はエンドの無限遠方で、与えられた単位切断に C^0 ノルムの意味で漸近している事が分かる。

これを踏まえると、(X,ω,J) の非コンパクト性から生ずる困難は以下の 3 点にある。本論文中の議論もこの順序で進む。

（１）曲率の反自己双対部分 $F^-_{a_n}$ の C^0 評価

（２）全エナジー積分 $E_n:=\int_X r_n|1-|\alpha_n|^2|$ のアプリオリ評価

（３）Z_n がエンドの無限遠へ逃げてゆく可能性の排除

なお以下において、エナジー密度関数 $r_n|1-|\alpha_n|^2|$ を $\mathcal{E}_n$ と書き、また記号 C 及び ϵ は (ω, J, L, ϱ) のみに依存する正定数を表す。

第1の困難は本質的に、命題 6.1 の証明の Step2) で定義されたテスト関数 q の C^0 評価をする所にある。この q は [T1] の命題 2.4 の証明において登場した関数 q そのものである。彼の議論では、E_n のアプリオリ評価と有界領域上のディリクレ問題のグリーン関数の性質が使われた。我々はこの段階では E_n と扱うべき有界領域の大きさに対するアプリオリ評価を持っていないので、代わりにアプリオリ評価 $\int_X r_n(1-|\alpha_n|^2)^2 < C \cdots (*)$ とアレキサンドロフ＝ベイケルマンの最大値原理を使う。なお命題 6.1 は命題 7.1 の証明に必要である。また、我々の与える $F_{a_n}^-$ の C^0 評価は、右端の定数項に $r^{-\frac{1}{4}}$ が掛かっている点で [T1] のものと少し違っているが、これは後で述べる単調公式の改良に関係する。

第2の困難に対しては、以下のように Z_n と $X\backslash Z_n$ で分けて考える。

命題 7.1 から直ちに従う $|\nabla_{a_n}\alpha_n|^2 < Cr$ という評価を、アプリオリ評価 $(*)$ と合わせると、Z_n を覆うのに必要な半径 $r_n^{-\frac{1}{2}}$ の測地球たちの個数が Cr_n で上から押えられる事がわかる。これを仮にネットの個数評価と呼ぼう。

これは $Vol(Z_n) < Cr_n^{-1}$ であることを意味するから、$|\alpha_n|^2$ の一様有界性と合わせると、直ちに $\int_{Z_n} \mathcal{E}_n < C$ が従う。

点 $x \in X\backslash Z_n$ の $X\backslash Z_n$ における単射半径を仮に $d_n(x)$ とおく。命題 3.2 から従う指数関数的評価 $\mathcal{E}_n(x) < Cr\cdot exp(-\epsilon\sqrt{r_n}d_n(x)) \cdots (\diamond)$ を、先程のネットの個数評価と組み合わせて、比較関数 Φ_n を条件 $\mathcal{E}_n < \Phi_n$ on $X\backslash Z_n$ および $\int_{X\backslash Z_n}\Phi_n < C$ を満たすようにうまく構成する。

第3の困難は、エナジー密度関数 $\mathcal{E}_n$ に対する単調公式と、上で得た E_n のアプリオリ評価を用いて解決される。いま仮にエンドの非常に遠方に $|\alpha_n|^2_{x_n} < \frac{1}{2}$ なる点列 $\{x_n\}$ があるとしよう。この時 x_n での単射半径は非常に大きいので、十分大きく取った正数 R に対して、測地球 $B_n := B(x_n, R)$ の列がとれる。r_n が十分大きくなった時点で、単調公式から従う $\int_{B_n}\mathcal{E}_n$ の下限がアプリオリ評価の与える E_n の上限を越え矛盾が出る。

ここで大切なのは、我々の単調公式は [T1] のものより改良されていて、いくらでも大きな測地球に対して適用できる点である。

以上の議論から、あるコンパクト集合 K 存在し、すべての n について $Z_n \subset K$ である事が分かった。このとき評価 $(\diamond)$ から、$X\backslash K$ 上で $|\alpha_n|^2$ が 1 に一様収束することがいえる。さらに [K-M2] の議論を引くと、これは $X\backslash K$ 上で α_n が与えられた単位切断に一様収束する事を意味する。よって後はすべて [T1] の議論に従って、主定理の証明が終る。