論文審査の結果の要旨

氏名　神田　雄高

スピンc構造の与えられた閉4次元リーマン多様体に対して、そのサイバーグ・ウイッテン不変量は、モノポール方程式の解のモジュライ空間の位相から定義される。また、シンプレクティク閉多様体に対して、そのグロモフ・ウイッテン不変量は、適合する概複素構造をとった後、これに対する擬正則曲線のモジュライ空間の位相から定義される。

タウベスは、4次元閉多様体において（2次元の自己双対調和2形式の次元 b_2^+ が2以上のとき）上の2つの不変量は等価であることを示した。すなわち、モノポール方程式を計量を平坦になる方向にリスケールしたとき、解の $U(1)$ 接続の曲率が擬正則曲線に集積していくことを証明した。

クロンハイマーとムロフカは、エンドが錘的である4次元開多様体に対し、モノポール方程式を考察し、エンドが漸近的平坦性を持つ概ケーラー構造（シンプレクティク構造 ω とそれに適合する概複素構造 J の組）を置いて、適当な境界条件を満たす解のモジュライ空間がコンパクトとなることを示し、サイバーグ・ウイッテン不変量の拡張を得た。

論文提出者神田雄高は、本論文においてエンドが錘的であり、弱凸性をもつ4次元概ケーラー多様体上で、モノポール方程式のクロンハイマー・ムロフカの解のモジュライ空間を考察し、このモノポール方程式の解の $U(1)$ 接続の曲率が、タウベスのリスケーリングプロセスにより、有界な擬正則曲線に集積していくことを示した。

具体的には、次が論文の主定理である。

エンドが錘的であり、弱凸性をもつ4次元概ケーラー多様体 (X,ω,J) の上のモノポール方程式のクロンハイマー・ムロフカの解のモジュライ空間の点列 $\{([\alpha_n,\beta_n,a_n],r_n)\in\mathcal{M}(L,\varrho,r_n)\}$ $(r_n\nearrow\infty)$ に対し、適当な部分列を取ると、集合 $\{\alpha_n^{-1}(0)\}$ はハウスドルフの意味で、あるコンパクトな擬正則曲線 D に収束する。D は $c_1(L,\varrho)$ のポアンカレ双対となる。

ここで、L をコンパクト集合の外では自明化 ϱ を持つ X 上の複素直線束とし、モノポール方程式は $\Omega^{0,0}(L)\times\Omega^{0,2}(L)\times\mathcal{A}(\mathcal{L})$ の元 (α,β,a) に対し、

$$\overline{\partial}_a\alpha+\overline{\partial}_a^*\beta=0$$
$$F_a^{0,2}=(r/4)\alpha^*\beta$$
$$\langle F_a,\omega\rangle=(\sqrt{-1}r/4)(-1+|\alpha|^2-|\beta|^2)$$

で与えられ、$\mathcal{A}(L)$ は L の $U(1)$ 接続の空間、F_a は曲率形式で、r は正定数、ゲージ群は $\mathrm{Map}(\mathrm{X},\mathrm{U}(1))$ である。また、境界条件は $(\alpha,\beta,$ 自明な接続$)$ に漸近するというものである。

論文提出者は、X が開多様体であるために現れる困難を、曲率の反自己双対部分 $F_{a_n}^-$ の評価、全エネルギー積分 $\int_X r_n|1-|\alpha_n|^2|$ のアプリオリ評価、集合 $\{|\alpha_n|^2 < 1/2\}$ の有界性を順に示すことにより克服して、上の定理を証明している。この過程は見事である。

さらに、論文提出者は上の定理を標準的接触構造を持つ3次元球面の有限群 Γ の自由作用による商空間 M_Γ を境界とするコンパクトシンプレクティク多様体 X_0 の位相の研究に応用し、そのような X_0 はスピン多様体で交差形式は負定値であることを示している。これは、太田・小野によって、ポアンカレホモロジー球面に対して得られていた結果を、新しい方法により広く拡張したものである。

このように論文提出者の研究は、非常に完成度の高いものであり、3次元接触多様体、4次元シンプレクティク多様体の研究において非常に重要なものである。よって本論文提出者神田雄高は博士(数理科学)の学位を授与されるに十分な資格があるものと認める。