論文の内容の要旨

論文題目　Minimax Admissible Estimation of a Multivariate Normal Mean and Improvement upon the James-Stein Estimator

題目和訳　多変量正規分布の平均に対するミニマクスかつ許容的な推定とJames-Stein 推定量の改良について

氏名　丸山 祐造

統計的決定理論は, 現代の統計的思考の基礎をなしており, ミニマクス性と許容性がその中心となる概念である. 最近 30 年来のミニマクス性と許容性に関する研究は, 数学の他分野, 例えば, 数理物理における偏微分方程式, 微分不等式, 確率過程の再帰的性質, などと強い結び付きがあることを示している. その研究の中心的な話題が多変量正規分布の平均ベクトルの推定であり, これは次に紹介する Stein 現象の典型である.

許容性は, 良さの基準としては, 弱い基準なので, 最尤推定量 (MLE) などの自然な推定量は, 許容的であることが想定される. X が多変量正規分布 $N(\theta, I_p)$ に従うとき, 二乗ロスのもとでの平均ベクトル θ の推定問題に対し, Stein(1956) は, MLE である自然なミニマクス推定量 X が $p \leq 2$ では, 許容的であるが, $p \geq 3$ では, 非許容的であることを示した. このように自然な推定量が非許容的になることは, Stein 現象と呼ばれている. James & Stein(1961) は, 明示的に X を改良する James-Stein 推定量 $\delta^{JS} = (1-(p-2)/\|X\|^2)X$ を導出している. さらに δ^{JS} の positive-part を取った推定量 $\delta_+^{JS} = \max(0, 1-(p-2)/\|X\|^2)X$ が δ^{JS} を改良するので, δ^{JS} は非許容的である.

一般に, ある推定量δがミニマクス推定量Xを改良するならば, δもまたミニマクスであり, Xよりも望ましい推定量である. 統計的決定理論の立場からは, δが許容的かどうかを確かめることが重要なテーマである. さらにδが非許容的である場合, δを改良する許容的な推定量を提案することも数学的に興味深いテーマである. 従って本論文では, ミニマクス性, 許容性の2つの最適性を満たす推定量の広いクラスを導出することを考える. またJames-Stein推定量を改良する推定量のクラスとその許容性について考える. 以下では, 論文の構成の概略を説明しながら, 上に述べたことをより具体的に述べる.

第2章では, 特に推定問題について, 統計的決定理論の基礎的概念をまとめる. 「許容性」, 「ミニマクス性」, 「ベイズ」, 「準許容性」などを定義し, それらの概念の間の関係についてのいくつかの定理を述べる.

第3章は, 多変量正規分布の平均ベクトルの推定についての一連の結果を含んでいる. 3.1節では, MLEであるXのミニマクス性と$p \geq 3$での非許容性について, 証明する. 3.2節では, 許容性と準許容性についてのBrown(1971,1988)の結果を紹介する. 3.3節では, ミニマクスでかつ許容的である推定量のクラスを考える. Brown(1971)の完備類定理「全ての許容的な推定量は, 一般化ベイズ推定量である.」に注意して, 密度関数が

$$\int_0^1 \left(\frac{\lambda}{1-\lambda}\right)^{p/2} \exp\left(-\frac{\lambda}{2(1-\lambda)}\|\theta\|^2\right) \lambda^{-a} h(\lambda) d\lambda \tag{1}$$

(ここで$h(\lambda)$は$(0,1)$上の可測関数である.)に比例しているような測度を事前分布として想定し, これに関する一般化ベイズ推定量$\delta_h(X) = (1-\phi_h(\|X\|^2)/\|X\|^2)X$(ここで

$$\phi_h(w) = w\frac{\int_0^1 \lambda^{p/2+1-a} h(\lambda)\exp(-w\lambda/2)d\lambda}{\int_0^1 \lambda^{p/2-a} h(\lambda)\exp(-w\lambda/2)d\lambda}$$

である.) の性質を調べる. 許容性については, Brown(1971)の一般化ベイズ推定量が許容的であるための必要十分条件により, $h(\lambda)$に依存せず, $a \leq 2$のとき, 許容的であることが分かる. ミニマクス性については, 直交変換群に関して共変な推定量のクラス$\delta(X) = (1-\phi(\|X\|^2)/\|X\|^2)X$, に対して, Stein's identityから得られるミニマクスであるための十分条件

$$\phi(w)\left(2(p-2)-\phi(w)\right)/w + 4\phi'(w) \geq 0 \tag{2}$$

を用いることにより, δ_hがミニマクスであるための十分条件が得られる. これまでに知られているミニマクスな一般化ベイズ推定量のクラスすなわちStrawderman(1971), Alam(1973), Berger(1976), Faith(1978), Maruyama(1998), Fourdrinier *et al.*(1998)の推定量のクラスは, 全て$h(\lambda)$によって特徴づけられるが, 我々はこ

れらのクラスを $h(\lambda)$ が有界か否かで, 次の表のように2つに分けることが出来ることを示す.

Author	$h(\lambda)$	notes
Strawderman-Berger	$h \equiv 1$	
Faith	bounded $h(\lambda)$	$\lambda h'(\lambda)/h(\lambda)$ is monotone
Fourdrinier *et al.*	bounded $h(\lambda)$	
Alam	$h = (1-\lambda)^b$	$b < 0$, $a = b + 2$
Maruyama	$h = (1-\lambda)^b$	$b < 0$

Table 1: いくつかの先行研究に対応する $h(\lambda)$

さらに我々は, Stein(1973) による次のような単純なアイデアに決定理論的な結果を与える. Stein(1973) は, 密度関数が $\|\theta\|^{2-p}$((1) において, $a = 2$, $h(\lambda) = 1$ とした密度に対応する) で与えられる分布と $\theta = 0$ の一点分布の重み付き分布に対する一般化ベイズ推定量を, James-Stein 推定量を改良している可能性がある推定量として提案した. この予想は後に密度関数が $\|\theta\|^{2-p}$ で与えられる事前分布に対する一般化ベイズ推定量が James-Stein 推定量を改良することが, Kubokawa(1991) によって示されるので, 一点分布の重みが小さい場合には, 的を得た予想である. しかし, Stein(1973) 以後, 決定理論的な結果については, James-Stein 推定量の改良はもちろんのこと, 許容性やミニマクス性でさえも証明されていなかった. 我々は, Stein(1973) の事前分布を一般化し, 密度が(1) で与えられる分布と $\theta = 0$ の一点分布の重み付き分布を考える. この分布の密度関数は, (1) において $h(\lambda) = \beta h(\lambda) + \delta(\lambda - 1)$(ここで $\beta > 0$ であり, また $\delta(\cdot)$ は Dirac の delta function である.) を代入したものに対応していることに注意する. この事前分布に対する一般化ベイズ推定量 $\delta_\beta(X) = (1 - \phi_\beta(\|X\|^2)/\|X\|^2)X$(ここで

$$\phi_\beta(w) = w\frac{\beta\int_0^1 \lambda^{p/2-a+1}h(\lambda)\exp(-w\lambda/2)d\lambda + \exp(-w/2)}{\beta\int_0^1 \lambda^{p/2-a}h(\lambda)\exp(-w\lambda/2)d\lambda + \exp(-w/2)}. \tag{3}$$

である.) は, Brown(1971) の結果より, $h(\lambda)$, β によらず, $a \leq 2$ のとき, 許容的であることが分かる. ミニマクス性については, δ_h において, ミニマクスな一般化ベイズ推定量を導くような $h(\lambda)$ に対し, $\beta \geq \beta^*$ のとき, $\delta_\beta(X)$ もまたミニマクスであるような β^* が存在することが示される.

さらに一般化ベイズ推定量について, 事前分布とミニマクス性とその推定量に対する $\phi(w)$ の間の関係についても調べる. ミニマクスであるための十分条件 (2) は, $\phi(w)$ が単調でないものも許しているが, $\phi(w)$ が単調である方が, 条件のチェックが容易であり, Faith(1978) により, $\phi(w)$ が単調であるミニマクスな一般化ベイズ推定量を導く事前分布の subclass の特徴付けがされている. 一方, $\phi(w)$ が単調でないミニマクスな一般化ベイズ推定量を導く事前分布の特徴付けに関する結果は断

片的であり, 整理されていなかった. 我々は $\phi(w)$ が, 極値を1つ, あるいは2つ持つような推定量を導く事前分布の subclass を特徴付ける. $\phi(w)$ が単調でないミニマクスな一般化ベイズ推定量に関する研究は, この分野で最も難しい問題「δ_+^{JS} を改良し, かつ許容的である推定量の導出」につながるため, 今後ますます重要になると, 我々は考える.

3.4 節では, Maruyama(1996) で提案された James-Stein 推定量を改良する推定量 $\delta_\alpha(X) = (1 - \phi_\alpha(\|X\|^2)/\|X\|^2)\,X$(ここで

$$\phi_\alpha(w) = w\frac{\int_0^1 \lambda^{\alpha(p/2-1)} \exp(-w\alpha\lambda/2)d\lambda}{\int_0^1 \lambda^{\alpha(p/2-1)-1} \exp(-w\alpha\lambda/2)d\lambda}$$

であり, また $\alpha > 1$ である.) の性質を論じる. $\delta_\alpha(X)$ with $\alpha > 1$ は, 許容的であるための必要条件である準許容性を満たすことが示される. しかし, 非許容的であることが予想されており, このことは, James-Stein 推定量を改良し, かつ許容的である推定量の広いクラスを導出することが, 難しいことを示唆している.

Stein 現象は, 多変量正規分布の場合以外にも現れる. Stein(1956) 以後, 最良共変推定量 δ_0 (二乗ロスのもとではミニマクスである.) を改良する問題が考えられてきた. Brown(1966) は, 分布の広いクラスに対して, 3つ以上の location parameter の同時推定において, δ_0 が非許容的であることを示した. 明示的に改良する推定量を導出するには, 分布を制限して考えることが必要であるが, この分野では, spherically symmetric distribution の平均ベクトルの推定が興味ある問題の一つとして, 研究されてきた. Strawderman(1974) は, spherically symmetric distribution の特別な場合として, scale mixtures of multivariate normal distributions (密度関数は

$$f(\|x-\theta\|^2) = \int_0^\infty (2\pi)^{-p/2} v^{p/2} \exp(-\frac{\|x-\theta\|^2 v}{2}) dG(v)$$

で与えられ, ここで, G は既知の分布関数である.) を考え, $p \geq 3$ において, ミニマクスである最良共変推定量 X を改良する推定量を提案した. さらに一般的に, Berger(1975), Bock(1985), Brandwein and Strawderman(1978,1991) は, spherically symmetric distribution の平均ベクトルの推定において, X を改良する推定量を提案した. しかし, ミニマクスであり, かつ許容的である推定量は導出されておらず, 決定理論的立場から, そのような推定量が強く望まれていた. 第4章において, 分布関数 G が密度関数 $g(v)$ を持つ場合の scale mixtures of multivariate normal distributions の平均ベクトルの推定問題を考える. $g(v)$ がある条件を満たすとき, (少なくとも multivariate-t 分布に対応する $g(v) = v^{m/2-1}\exp(-mv/2)$ は, その条件を満たす) ミニマクスかつ許容的な推定量が提案される.