論 文 の 内 容 の 要 旨

論文題目 CONSTRUCTION OF LIE ALGEBRAS AND LIE SUPERALGEBRAS
(リー代数及びリースーパー代数の構成)

氏 名　　柿 市 良 明

既知の代数系から, リー代数及びリースーパー代数を構成し, その構造論を明らかにしようというのが本論文の目的である。ここで, 既知の代数系とは, 例えばジョルダン代数 (この場合は, ある弱い意味での結合則が成り立っている) のように, 必ずしも結合則 $(xy)z = x(yz)$ をみたさない代数, 即ち, 非結合代数, 及び, ジョルダン三項系やリー三項系等の三項系 (普通は, 2 個の要素の積 xyが定まっているが, この場合は, 3 個の要素 x, y, zで始めて積 $\{xyz\}$ が定まる) のような代数系が, 主な研究対象となっている。

ジョルダン代数は, はじめは, 量子力学を代数的に定式化するために導入されたが, その後, 実解析学, 複素解析学, リー代数論, 代数群論, 幾何学及び数理物理学等の発展に非常に有効な寄与をなしてきた。

三項系は, はじめはリー代数 $\mathfrak{L}$ の中で, その積を $[a,b]$ とすると, 三個の積 $[a,[b,c]]$ で閉じている代数系の研究として発足したが, その後, ジョルダン代数のある種の一般化としてのジョルダン三項系, また, 対称空間の接代数としてのリー三項系 (幾何学的に云えば, 対称空間の接代数では, 2 個の積は, その接平面の外に出てしまっているが, 3 個の要素の積ではじめて, またその接平面上に入っているという事実を示している) 等が代表的なものであった。更にその後, 例外型リー代数論及び幾何学との関連から, 一般化されたジョルダン三項系が研究され, これにより, 一般の n 次の次数付きリー代数が得られることが, カントールによって示された。また, フロイデンタールの例外型リー代数論及び幾何学の研究の流れから生じた三項系があり, 上記二つを併せて (但し, 一般化されたジョルダン三項系は 2 次の場合として) フロイデンタール・カントール三項系が生まれた。これらの三項系達が, 本論文でリー代数及びリースーパー代数を構成するために非常な有効性を発揮した。

標数 0 の代数閉体 (この語は以下で時々略す) 上の有限次元単純リー代数論は, 古典型 A_l, B_l, C_l, D_lの場合は, 一般に知られていたが, 例外型 G_2, F_4, E_6, E_7, E_8の場合は, 以前はあまり統一的研究は少なく, ま

た, 幾何学や, 数理物理学への応用の研究も, 後の時代になってから発展してきた。本論文は, 上記の既知の代数系から, 例外型のリー代数を構成しよう, また, できれば, 古典型, 例外型を両方併せて構成する事により, その構造を, ある程度統一的に研究しようという目的でなされた成果である。しかも, この研究方法で更に, リー代数の次数付き一般化として, MIT の Kac によって導入されたリースーパー代数をも構成することが, 代数的意義, 幾何学との関連, 更に数理物理学との関係で非常に重要な意味をもってくる。ここで, 一言述べておきたいことは, リー代数に次数を付けて一般化しようとすると, 自然に生じて来るのは, 次数付きリー代数ではなく, リースーパー代数であるという事を強調しておきたい。

本論文で第一章では, 先ず, 浅野氏及び山口氏の共同研究で, シンプレクティック三項系（構造論的には, 程んどリー代数的である）から, A_1型以外の有限次元単純リー代数を全て構成した。一方, 私と常に研究の連絡をとってきた, アリソン及びハインは, ジョルダン代数と, 三項系を考え, そのジョルダン代数の, その三項系の上での特殊表現を用いて, 上記有限次元単純リー代数をすべて構成した。しかも, 上記の両方の構成は幾何学と深く関わっている。本論文は, 両方の構成法を詳細に研究し比較した結果, 浅野・山口の構成は, アリソン・ハインの構成の特別な場合になっている事実を, 具体的に同型対応を明示することにより, 明らかにした。

第二章では, ある結合的三項系 Wと, 一般化されたジョルダン三項系 $\mathfrak{J}$ とのテンソル積 $W \otimes \mathfrak{J}$ がまた一般化されたジョルダン三項系になっており, これに新たな積を導入して, リー三項系を作り, それのジャコブソンの意味での標準埋め込みで, リー代数を構成した。上記で, Wが 2 次元のときは, $\mathfrak{J} \oplus \mathfrak{J}$ という直和を考えていることと同じである。また, この本論文で, 浅野・山口の構成との関連性も明確に示してある。

上記に用いられた三項系達のキリング形式等を明確に導き出し, また, 三項系達のイデアル論を用いて, 構成されたリー代数のイデアルを研究することにより, どのような三項系から, 単純なリー代数を求められるか, その方法を明らかにした。

第三章では, 上記第二章の理論をすべて次数を付けて一般化することにより, リースーパー代数を構成した。この理論体系は, 程んどすべてが, 第二章の次数付きの一般化になっているが, この章でも, 明らかに, リー代数の自然な次数付き一般化は, 次数付きリー代数ではなく, リースーパー代数であるという私の考えが, 実例を通して明示されている。

第四章では, ある結合的三項系 Wと, フロイデンタール・カントール三項系 $U(\varepsilon,\delta)$（但し, $\varepsilon = \pm 1, \delta = \pm 1$ であって, $\varepsilon = +1$ のとき, フロイデンタールの流れ, $\varepsilon = -1$ のとき, カントールの流れ）とのテンソル積 $W \otimes U(\varepsilon,\delta)$ がまた再び, フロイデンタール・カントール三項系になっており, 直和 $W \otimes U(\varepsilon,\delta) \oplus \overline{W \otimes U(\varepsilon,\delta)}$ がリー三項系になっていることを示し, これの標準埋め込みとして, リー代数及び リースーパー代数を構成することができた。次の第 3 節では, 上記フロイデンタール・カントール三項系 $U(\varepsilon,\delta)$ 及び, それの自己準同型写像：

$$K(a \otimes x, b \otimes y) = l(a,b) \otimes K(x,y)$$

（ここで, $a, b \in W$, $x, y \in U(\varepsilon,\delta)$ である）で生成されるジョルダン三項系 $\mathfrak{J}$ とを用いて, それらの直和空間

$$V(\varepsilon,\delta) = \mathfrak{J} \oplus \mathfrak{J} \oplus W \otimes U(\varepsilon,\delta) \oplus \overline{W \otimes U(\varepsilon,\delta)}$$

が, 自然な二項積と三項積に関して, リー三項代数（既約等質空間の接代数）及び, リースーパー三項代数になることを示し, それらの標準埋め込みとして, リー代数及びリースーパー代数を構成することができた。ここには, 幾何学的意味もある。

更に，この章の最後のセクションで，ある積の結合的三項系を二つ A_1，A_2を用い，先のフロイデンタール・カントール三項系 $U(\varepsilon,\delta)$ とのテンソル積 $A_1 \otimes U(\varepsilon,\delta) \otimes A_2$が，自然に再びフロイデンタール・カントール三項系になる事を示し，それを用いて，リー三項系を作り，それの標準埋め込みとしてリー代数及びリースーパー代数を構成することができた。この章の三通りの構成もすべて幾何学及び数理物理学等と深く関連している。

第五章では，既約等質空間の接代数としてのリー三項代数の性質を充分研究し，その構造論を用いてリー代数及びリースーパー代数を構成した。この代数系は，リー代数の一般化であり，また，リー三項系の一般化にもなっている構造をもっている。この章で，先ずはじめは，このリー三項代数の「対」から，その代数系の微分を上手に用いることにより，新たにリー三項代数を構成し，その構造論を示した。ついで，このリー三項代数に次数を付けて一般化した代数系（本論文中では LSTA と略記してある）を作ると，この代数系の微分全体が，自然にリースーパー代数になっていることがわかる。更に，上記代数系（LSTA）の標準埋め込みとして，ごく自然にリースーパー代数を得ることができる。上記の代数系はすべて，数学的構造から云っても相互に綿密な関連性をもっており，その構成過程である理論及び構造的関連性は，つぎに示したダイアグラムに本質的に明確になっている：

$$
\begin{tikzcd}
\text{リー三項系} \arrow[r, "\text{一般化}"] \arrow[d, "\text{(標準埋め込み)}"'] & \text{リー三項代数} \arrow[r, "\text{次数付き一般化}"] \arrow[d, "\text{(標準埋め込み)}"'] & \text{LSTA} \arrow[d, "\text{(標準埋め込み)}"'] \\
\text{リー代数} & \text{リー代数} \arrow[r, "\text{次数付き一般化}"] & \text{リースーパー代数}
\end{tikzcd}
$$