論文審査の結果の要旨

氏名　藤井康広

本論文ではスピン 1/2 の一次元量子スピン模型, XXZ 模型についての 2 点相関関数を研究している。ハミルトニアンは

$$\mathcal{H}_{XXZ} = \sum_{n=1}^{L} (\sigma_n^x \sigma_{n+1}^x + \sigma_n^y \sigma_{n+1}^y + \Delta \sigma_n^z \sigma_{n+1}^z - h\sigma_n^z),$$

であらわされる。Δ は $+\infty$ から $-\infty$ の値をとりうるが $\Delta = 0$ の場合は $XX0$ 模型、$\Delta = 1$ の場合は XXX 模型と呼ばれる。

第 2 章では代数的ベーテ仮説法のレヴューを行っている。また相関関数の母関数として

$$Q(\alpha, m) = \langle \exp(\alpha \sum_{l=1}^{m} (1 - \sigma_l^z)) \rangle,$$

を考え、これから 1 点関数、2 点関数、emptiness formation probability $P(m) \equiv \langle \prod_{l=1}^{m} \frac{1}{2}(1+\sigma_l^z) \rangle$ 等を計算することができる。

$$\begin{aligned}
&\langle \sigma_1^z \rangle = 1 - 2\frac{\partial}{\partial \alpha} Q(\alpha, 1)|_{\alpha=0}, \\
&\langle \sigma_1^z \sigma_{m+1}^z \rangle = 2\Delta_m \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} Q(\alpha, m)|_{\alpha=0} - 4\frac{\partial}{\partial \alpha} Q(\alpha, 1)|_{\alpha=0} + 1, \\
&P(m) = Q(-\infty, m).
\end{aligned}$$

ここで Δ_m は格子ラプラシアンであり次式で定義される。

$$\Delta_m f(m) = \begin{cases} f(m+1) - 2f(m) + f(m-1) & (m \geq 2) \\ f(m+1) - 2f(m) & (m = 1) \end{cases}$$

第 3 章ではこの $Q(\alpha, m)$ がベーテ波動関数で計算できることのレヴューを行っている。代数的ベーテ仮説法によれば、down spin の数が N のベーテ状態の波動関数のノルムは N 行

N 列の行列 $\mathcal{N}$ の行列式であらわされることが古くから知られている。Essler 達は $Q(\alpha, m)$ をベーテ状態について計算すると

$$Q(\alpha, m) = \frac{(0|\det \mathcal{G}|0)}{\det \mathcal{N}},$$

であらわされることを示した。ここで $\mathcal{G}$ は dual field と呼ばれる 4 個のボーズ場を含む N 行 N 列の行列である。 $N, L \to \infty$ の熱力学極限ではこれの分子と分母はフレドホルム行列式と呼ばれる積分核に対する行列式で書き表すことができる。Frahm, Its, Korepin　は α が $-\infty$ の極限をとり、$P(m)$ に対する方程式を得た。またこれは 2 行 2 列の演算子に対するリーマン・ヒルベルト問題になることを示した。論文提出者は $\alpha = 0$ の場合には 1 点関数や 2 点関数が計算できることに着目して、この問題が 4 行 4 列の演算子に対するリーマン・ヒルベルト問題に帰着することを示した。

実際にこの 4 行 4 列の演算子に対するリーマン・ヒルベルト問題を解くことは一般の Δ について行うことは大変困難な問題である。論文提出者は 4 章では $\Delta = 0$ の場合については厳密に扱うことができることを示した。この場合 dual field は消去されて

$$Q(\alpha, m) = \mathrm{Det}(1 - U),$$

という形で単純な積分核 U に対するフレドホルム行列式で書き表すことができる。論文提出者はこの計算を行うことができて、

$$\langle \sigma_1^z \rangle = 1 - \frac{2k_F}{\pi},$$

$$\langle \sigma_1^z \sigma_{m+1}^z \rangle = \langle \sigma_1^z \rangle^2 - \frac{4\sin^2 mk_F}{\pi^2 m^2},$$

等の結果を得た。ここで k_F はフェルミ運動量である。これ

はXX0模型に対する既知の結果と一致する。また3章で定式化したリーマン・ヒルベルト問題もこの場合は厳密に解くことができた。

以上のように、論文提出者はXXZ模型の相関関数という可積分系の分野では昔から難問とされて来た問題に意欲的に取り組んで来た。この論文では物理的に新しい発見があったとは言えないが、4行4列の演算子に対するリーマン・ヒルベルト問題を定式化したことは新しい試みであり、将来役に立つ可能性がある。本研究の内容は数理物理的に興味深いだけでなく、実際の量子一次元系の物理としても重要なものを含んでいる。また一貫して厳密な手法で問題を扱っているばかりでなく、相関長の具体的な計算も行っている。論文提出者はこの分野で少なからぬ寄与をしたと評価でき、博士論文として、十分合格と判断される。なお本研究は指導教官の和達三樹氏との共同研究であるが、論文提出者が主体となって解析を行なったもので論文提出者の寄与が大きいものと認められる。従って、審査員一同、論文提出者は博士(理学) の学位にふさわしいと判定した。