論文の内容の要旨

An induction for bimodules arising from subfactors

部分因子環から来る両側加群の延長

by 川室 圭子

1 An induction for a bimodule

定理 1.1 Type II_1 factor N, P の bimodule ${}_N X_P$ と N-P cyclic かつ両側 bounded な vector $\xi \in X$ のペア $({}_N X_P, \xi)$ (以下、pointed bimodule と呼ぶ) と、completely positive (CP)-map $\phi : N \to P$ で $1 \otimes_\phi 1 \in N \otimes_\phi P$ を bounded vector として持つものは、Stinespring dilation theorem により、bimodule の conjugatetion や CP-map の adjoint operation と compatible になるように一対一対応している。

$$\begin{array}{ccc} ({}_M H_Q, \xi) & \longleftrightarrow & \phi : M \to Q \\ \updownarrow & & \updownarrow \\ ({}_Q \overline{H}_M, \overline{\xi}) & \longleftrightarrow & \phi^* : Q \to M \end{array}$$

ここで、$\xi \in X$ が N-P cyclic とは、vector ξ に両側から N, P を作用させ、ヒルベルト空間 X の内積で完備化したもの $\overline{N\xi P}$ が、X に一致することである。また $\xi \in X$ が両側 bounded vector (以下、単に bounded と書く) であるとは、ある $C_\xi > 0$ が存在して、任意の $n \in N, p \in P$ に対し、$\|n\xi\| \leq C_\xi \|n\|_2$, $\|\xi p\| \leq C_\xi \|p\|_2$ が成り立つことである。

以下で本論文の主定理を述べるが、その前にそれの背景と位置づけを簡単に説明する。

まず、Longo と Rehren が nets of subfactor の endomorphism を大きい factor の endomorphism に延長する方法を発見した。後に Xu は conformal inclusion から生じる subfactor にそれを適応し、興味深い例を計算したため、多くの研究者が endomorphism の延長に関心をよせるようになった。その方法は α-induction と名付けられた。Böckenhauer, Evans, Kawahigashi は、α-induction において本質的なのは、「endmorphism のなす finite system が braiding をもっていることである」と指摘した。さらに Izumi は system ではなくて、個々の endomorphism に対して half braiding という概念を導入し、Longo-Rehren subfactor については、ある endomorphism が大きい環に延長出来ることと、その endomorphism が half braiding を持つことが、必要十分の関係にあることを発見した。

ところで、フォンノイマン環はタイプ I, II, III に分類されていて、以上は III 型の結果である。II 型では同じようなことは考えられないであろうか？ Masuda により、Longo-Rehren inclusion (type III subfactor の構成法) と、Ocneanu により定義された asymptotic inclusion (type II_1 subfactor の構成法) は本質的に同じものであることが知られている。また categorical には (type III factor の endomorphism のなす system , intertwiner spaces) と (type II_1 subfactor から生じる bimodule の system , intertwiner spaces) はきれいに対応している。始めに述べたように、pointed bimodule と CP-map は一対一に対応していることを考えれば、「II 型 subfactor の CP-map を大きい環の CP-map に延長する方法はないか」、という問題が自然におこる。実際、Jones や Popa を始めとする多くの研究者がこのことに疑問を抱き続けてきた。それに対する一つの答えが以下の定理である。

この定理のポイントは、今までの III 型 factor の endomorphism の延長では (Izumi の Longo-Rheren という特定の inclusion に関する結果を除いて) 十分条件のみを与えていたが、ここでは、CP-map が延長できるための必要十分条件を与えることに成功している点である。また α-induction は以下の定理の $3 \Rightarrow 1$ にあたり、 Izumi の結果は $2 \Leftrightarrow 3$ から導かれる。さらに、幸崎の III 型 subfactor の automorphism の延長に関する定理も $1 \Leftrightarrow 2$ に含まれる。他には、CP-map の定義域と値域が異なるように条件が設定してある点も、endomorphism や automorphism の延長問題の設定よりも一般的である。

定理 1.2 *$N \subset M, P \subset Q$ を 有限 Jones index をもつ type II_1 subfactor とする。${}_NX_P$ を有限 index ($[{}_NX_P] < \infty$) をもつ bimodule とする。以下の条件は同値である。*

1. *有限 index をもつ bimodule ${}_MY_Q$ が存在して、それは左 N 作用と右 P 作用が compatible になるように X を subspace ($X \subset Y$) として含んでおり、以下の条件も満たしている。つまり、subfactor の Jones index と bimodule の左次元が等しい、i.e.,*

$$[M : N] = [Q : P] < \infty,\ \dim_N X = \dim_M Y < \infty.$$

(この二つの等式から右次元の一致 $\dim X_P = \dim Y_Q$ も導かれる。) また N-P cyclic で bounded な vector $\xi \in X$ が存在し、それを埋め込み写像 $X \hookrightarrow Y$ によって Y 埋め込んだものを $\eta \in Y$ とおくと、$\eta \in Y$ は M-Q cyclic かつ

bounded である。さらにペア $({}_N X_P, \xi)$, $({}_M Y_Q, \eta)$ に対応する *CP-map* をそれぞれ $\phi : N \to P, \psi : M \to Q$ とすると、

$$\psi|_N = \phi,\ \psi^*|_P = \phi^*$$

が成り立つ。

2. 有限 *index* をもつ *bimodule* ${}_M Y_Q$ が存在して、*Bimodule* の同型

$$\tau : {}_N X \otimes_P Q_Q \simeq {}_N M \otimes_M Y_Q,$$

$$\sigma : {}_M M \otimes_N X_P \simeq {}_M Y \otimes_Q Q_P$$

が成立ち、さらに *N-P cyclic* かつ *bounded* な $\xi \in X$ と、$\eta \in Y$ が存在し、

$$\tau(\xi \otimes_P 1) = 1 \otimes_M \eta,$$

$$\sigma(1 \otimes_N \xi) = \eta \otimes_Q 1$$

をみたす。

3. *Bimodule* の同型

$$\varphi : {}_N M \otimes_N X_P \simeq {}_N X \otimes_P Q_P$$

が成り立ち、以下をみたす。まず、*N-P cyclic* かつ *bounded* な *vector* $\xi \in X$ が存在し、$\varphi(1 \otimes_N \xi) = \xi \otimes_P 1$ をみたす。そして、*bimodule* の *homomorphism* $s \in \mathrm{Hom}({}_M M \otimes_N M_M, {}_M M_M), t \in \mathrm{Hom}({}_Q Q \otimes_P Q_Q, {}_Q Q_Q)$ と φ に対して以下のようなペンタゴン条件（ *braiding fusion equation* ともいう）が成り立つ。$\zeta \in {}_N M \otimes_N X_P$ に対し、

$$(1 \otimes_N \varphi)(s^* \otimes_N 1_X)(\zeta) = (\varphi^{-1} \otimes_P 1)(1_X \otimes_P t^*)\varphi(\zeta).$$

条件 2, 3 はより強い条件にいいかえることもできる。つまり、ベクトル$\xi \in X$ は cyclic なので、他の cyclic ベクトルに置き換えることも可能で、そうすると、ステートメントは “任意の *N-P* cyclic かつ bounded な vector $\xi \in X$ に対して” という記述に書き換えられる。

Definition 1.3 ペア $({}_N X_P, \xi)$, $({}_M Y_Q, \xi)$ が上の定理の条件 *1* 又は *2* を満足しているとき

$$({}_N X_P, \xi) \subset ({}_M Y_Q, \xi)$$

とかく。

2 An extension of an inclusion of bimodules

本論文の後半では $({}_N X_P, \xi) \subset ({}_M Y_Q, \eta)$ から出発して Jones basic construction: $N \subset M \subset M_1, P \subset Q \subset Q_1$ と相性のよくなるように $({}_N X_P, \xi) \subset ({}_M Y_Q, \eta) \subset ({}_{M_1} Z_{Q_1}, \nu)$ を構成したい。α-induction や half braiding を用いた induction では、一般に、一段階の induction はできるが、それを繰り返して tower を作ることはできない。ところが、前章のように pointed bimodule を延長し、pointed bimodule の inclusion を定義すれば、以下の方法で tower を構成できる。

$\Phi : Y \to X$ を左右の作用と compatible な直交射影、$\{m_j\}, \{n_k\}$ をそれぞれ $N \subset M, P \subset Q$ の Pimsner-Popa basis とおく。そして、$({}_{M_1} Z_{Q_1}, \nu)$ をそれぞれ

$$
{}_{M_1} Z_{Q_1} := {}_{M_1} M \otimes_N X \otimes_P Q_{Q_1},
$$

$$
\nu := [Q : P]^{-1/2} \sum_{j,k} m_j \otimes_N \Phi(m_j^* \eta n_k) \otimes_P n_k
$$

と定義すればよい。左右の M_1, Q_1 作用と内積は、e, f をそれぞれ $N \subset M, P \subset Q$ の Jones projection とし、$\mathcal{E}_N : M \to N, \mathcal{F}_P : Q \to P$ を trace を保つ conditional expectation とすると、

$$
\begin{aligned}
(aeb) \cdot x \otimes_N \lambda \otimes_P y \cdot (pfq) &:= a\mathcal{E}_N(bx) \otimes_N \lambda \otimes_P \mathcal{F}_P(yp)q, \\
\langle x \otimes_N \lambda_1 \otimes_P y \mid z \otimes_N \lambda_2 \otimes_P w \rangle_Z &:= \langle \mathcal{E}_N(z^* x) \lambda_1 \mathcal{F}_P(y w^*) \mid \lambda_2 \rangle_X.
\end{aligned}
$$

ヒルベルト空間 Y の元は

$$
{}_M Y_Q \ni \eta \mapsto [Q : P]^{-1/2} \sum_{j,k} m_j \otimes_N \Phi(m_j^* \eta n_k) \otimes_P n_k^* \in {}_{M_1} Z_{Q_1}
$$

によって Z に norm を保つように埋め込まれている。