論文審査の結果の要旨

氏名　齊藤（梅野）有希子

本論文は4章に別れ、1章は全体の紹介、2章は1次元スピンレスフェルミオン系の量子転送行列のフェルミオン的定式化のレヴューをしている。これは転送行列のフェルミ粒子表示の準備となるものであり、3章では本論の1次元ハバード模型の1粒子密度行列の相関距離の温度依存性を研究している。第4章は全体のまとめである。

一般に1次元のスピンレスフェルミオン系は Jordan-Wigner の変換により、XXZ 模型に変換されるので、自由エネルギーの計算やスピンの相関距離の計算には通常の six-vertex 模型の R 演算子の方法で十分であるが1体の密度行列にからむ相関距離の計算にはフェルミオン的定式化が必要になる。またハバード模型も Jordan-Wigner 変換によりスピンモデルに変換した研究がなされてきたが1体の密度行列にかんする相関距離の計算にはやはりフェルミオン的定式化が必要になってくる。

Hubbard ハミルトニアンは

$$\mathcal{H} = -\sum_{j=1}^{L}\sum_{\sigma}(c_{j+1\sigma}^{\dagger}c_{j\sigma} + c_{j\sigma}^{\dagger}c_{j+1\sigma}) + U\sum_{j=1}^{L}(c_{j\uparrow}^{\dagger}c_{j\uparrow} - \frac{1}{2})(c_{j\downarrow}^{\dagger}c_{j\downarrow} - \frac{1}{2}),$$

であらわされる。この1次元量子模型に対応する2次元古典系は Shastry によって提案された。Shastry はこれをスピン模型に変換して論じたが、1粒子密度行列を計算するためこの論文ではフェルミ演算子を用いて次のような R 演算子を導入する。

$$R_{12}(u,v) = A_{12}^{\uparrow}(u-v)A_{12}^{\downarrow}(u-v) + \frac{\cos(u-v)}{\cos(u+v)}\tanh(h(u)-h(v))$$

$$\times A_{12}^{\uparrow}(u+v)A_{12}^{\downarrow}(u+v)(2n_{1\uparrow}-1)(2n_{1\downarrow}-1), \quad h(u) = \frac{1}{2}\sinh^{-1}(\frac{U}{4}\sin 2u),$$

$$A_{12}^{\sigma}(u) = \cos u(n_{1\sigma}n_{2\sigma} + (1-n_{1\sigma})(1-n_{2\sigma}))$$

$$-\sin u(n_{1\sigma}(1-n_{2\sigma})+(1-n_{1\sigma})n_{2\sigma})+(c^\dagger_{1\sigma}c_{2\sigma}+c^\dagger_{2\sigma}c_{1\sigma}).$$

この演算子は Yang-Baxter 関係式

$$R_{12}(u_1,u_2)R_{13}(u_1,u_3)R_{23}(u_2,u_3)=R_{23}(u_2,u_3)R_{13}(u_1,u_3)R_{12}(u_1,u_2)$$

を満足するのでこれから可解の 2 次元模型が定義され、転送行列は

$$\tau(u)=\mathrm{Str}_a R_{a,L}(u,0)R_{a,L-1}(u,0)...R_{a,1}(u,0),$$

となる。ハミルトニアンは

$$\mathcal{H}=\tau^{-1}(0)\frac{d}{du}\tau(u)|_{u=0},$$

であらわされる。また

$$\tilde{R}_{12}(u,v)=R_{21}^{st_1}(u,v)$$

とすると、これも Yang-Baxter 関係式を満足し、

$$\tilde{\tau}(u)=\mathrm{Str}_a\tilde{R}_{a,L}(0,u)\tilde{R}_{a,L-1}(0,u)...\tilde{R}_{a,1}(0,u),$$

も交換する転送行列である。

$$\tau(-u)\tilde{\tau}(u)=1-2u\mathcal{H}+O(u^2),$$

なので分配関数は

$$Z=\mathrm{Tr}e^{-\beta\mathcal{H}}=\mathrm{Tr}(\tau(\frac{-\beta}{N})\tilde{\tau}(\frac{\beta}{N}))^{N/2}+O(\frac{\beta}{N})$$

となる。従って量子転送行列を定義し、

$$\tau^{QTM}(\frac{\beta}{N},v)=\mathrm{Tr}R_{N,j}(-u_N,v)\tilde{R}_{N-1,j}(v,u_N)...R_{2,j}(-u_N,v)\tilde{R}_{1j}(v,u_N),$$

最大固有値 λ_1 を求めれば分配関数は

$$Z=(\lambda_1)^L$$

で与えられるのでサイト当たりの自由エネルギーは $-\beta^{-1}\ln\lambda_1$ となる。またこの行列の部分空間での最大固有値を求めれば

$$\langle S_j^+ S_k^- \rangle \simeq (\lambda_2/\lambda_1)^{|j-k|}, \quad \langle c_j^\dagger c_k \rangle \simeq (\lambda_3/\lambda_1)^{|j-k|},$$

等の 2 点関数の相関距離が求められる。この論文では $\langle c_j^\dagger c_k \rangle$ の相関距離を数値計算を行った。Hubbard 模型で half-filled かつ zero-field の場合は絶対零度でも有限で Stafford-Millis は

$$\xi^{-1} = \frac{4}{U}\int_1^\infty \frac{\ln(y+\sqrt{y^2-1})}{\cosh(2\pi y/U)}dy,$$

になると予想している。この数値計算では $N=1024$ までの計算を行い、低温での相関距離を評価し、この予想がよく成り立っていることを確認した。

本研究の内容は数理物理的に興味深いだけでなく、実際の量子一次元系の物理としても重要なものを含んでいる。また一貫して厳密な手法で問題を扱っているばかりでなく、相関長の具体的な計算も行っている。論文提出者はこの分野で少なからぬ寄与をしたと評価でき、博士論文として、十分合格と判断される。なお本研究は和達三樹氏, 城石正弘氏、鈴木淳史氏、堺和光氏、Heng Fan 氏との共同研究であるが、論文提出者が主体となって解析を行なったもので論文提出者の寄与が大きいものと認められる。従って、審査員一同、論文提出者は理学博士の学位にふさわしいと判定した。