論文内容の要旨

論文題目 Algebraic Approach to Quantum Many-Body Systems of Calogero–Sutherland Type

(Calogero–Sutherland 型の量子多体系に対する代数的なアプローチ)

氏名　　西野晃徳

現代物理学の発展の中で, 厳密に解ける模型は重要な役割を果たしてきた. 水素原子のエネルギースペクトルの厳密な記述は量子力学の妥当性の証拠の一つであったし, Ising 模型の厳密解は統計力学の枠組みで相転移が扱えることを教えてくれた. 20 世紀後半, 低次元系においてさまざまな厳密に解ける系が発見された. 実験技術の進歩により, 低次元系が実験室で実現可能となった今, これらの厳密に扱える低次元系の重要度はさらに増している. 本論文では, 厳密に扱える 1 次元量子多体系の中でも長距離相互作用を持つ一つのクラス, Calogero–Sutherland 模型を議論する.

1971 年, Calogero は 1 次元調和振動子ポテンシャル内において粒子間距離の逆二乗に比例する相互作用を持つ量子多体系を導入した:

$$H=\sum_{i=1}^{N}\Big(-\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x_i^2}+\frac{1}{2}\omega^2x_i^2\Big)+\sum_{1\le i<j\le N}\frac{a(a-1)}{(x_i-x_j)^2}.\quad (x_i\in\mathbb{R}) \tag{1}$$

ここで N,ω,a はそれぞれ全粒子数, 調和振動子ポテンシャルの強さ, 相互作用の結合定数である. この量子多体系を Calogero 模型と呼ぶ. Calogero はこの系のエネルギースペクトルが厳密に計算できることを示した,

$$E_\mu=\omega\Big(|\mu|+\frac{1}{2}N\big(Na+(1-a)\big)\Big).$$

ここで μ は分割, すなわち $\mu_1\ge\mu_2\ge\cdots\ge\mu_N\ge 0$ を満たす非負整数列で, $|\mu|=\sum_{i=1}^{N}\mu_i$ とした. Calogero の仕事をうけ, Sutherland は周期的境界条件で逆二乗型の相互作用をする模型 (Sutherland 模型) のエネルギースペクトルを厳密に計算した,

$$H_{\mathrm{S}}=-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\frac{\partial^2}{\partial\theta_i^2}+\sum_{1\le i<j\le N}\frac{a(a-1)}{4\sin^2\big((\theta_i-\theta_j)/2\big)}.\quad (0\le\theta_i\le 2\pi) \tag{2}$$

これらの量子多体系は Calogero–Sutherland 型の模型 (CS 模型) と呼ばれ, 現在さまざまなバリエーションが知られている. 本論文で議論する CS 模型は特に次のような性質を持つことが特徴的である:

i) ハミルトニアンを含む自由度と同数の可換な保存演算子を持つ (量子可積分性).

ii) 全ての保存演算子を同時対角化する固有状態が存在し, 同時固有空間が 1 次元になる. 従って, これらの同時固有状態はヒルベルト空間の直交系を与える.

iii) 同時固有状態の波動関数が基底状態の波動関数と多変数直交多項式に因子化できる.

i) の量子可積分性は, 例えば「Dunkl 演算子を用いた定式化」で示される. これは Dunkl や Cherednik によって与えられた可換な演算子を用いると, CS 模型のハミルトニアンを含む可換な保存演算子の組が系統的に構成できるという定式化で, Polychronakos によって導入された. また上に挙げた Sutherland 模型, Calogero 模型に対しては, ボソン的な粒子を想定した場合, iii) で言う多項式部分がそれぞれ Jack 多項式, 多変数 Hermite 多項式と呼ばれる直交多項式で与えられることが, 前者は Heckman–Opdam や Forrester, 後者は宇治野–和達によって明らかにされた. 本論文の目的は, 上の系を含めた広いクラスの CS 模型に対して代数的な方法で全ての保存演算子を同時対角化する固有状態を構成し, これを用いて固有状態のノルムを計算する新しい方法を与えることである.

CS 模型の固有状態を上昇演算子 (あるいは生成演算子) によって代数的に構成しようという試みはこれまでにもなされてきた; 例えば Brink–Hansson–Vasiliev による方法, Lapointe–Vinet の方法などがある. 前者で得られた状態はハミルトニアンを対角化するが, それ以外の保存演算子は対角化せず, 直交系をなさない. 後者で得られた状態は全ての保存演算子を対角化し, 直交系を与える. しかしその性質上, 調和振動子模型のときのようなノルム計算への応用は期待できない. 本論文では, 問題を内部自由度を持ち識別可能な粒子を記述する CS 模型に拡張し, ノルム計算への応用が可能な上昇演算子が導入できることを示す.

Calogero 模型は次のように拡張する:

$$H_{\mathrm{C}} := \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\Big(-\frac{\partial^2}{\partial x_i^2}+\omega^2 x_i^2\Big)+\sum_{1\le i<j\le N}\frac{a^2-as_{ij}}{(x_i-x_j)^2}, \tag{3}$$

ここで s_{ij} は N 変数の関数 f に対して次のように作用する:

$$(s_{ij}f)(\cdots,x_i,\cdots,x_j,\cdots)=f(\cdots,x_j,\cdots,x_i,\cdots).$$

この系の基底状態は変数 $\{x_i\}$ の入れ替えに関して対称な

$$\phi_{\mathrm{g}}(x) := \prod_{1\le i<j\le N}|x_i-x_j|^a \exp\Big(-\frac{1}{2}\omega\sum_{i=1}^{N}x_i^2\Big)$$

で与えられる. しかし一般の励起状態は変数 $\{x_i\}$ の入れ替えに関して非対称なため, 系(3) は識別可能な粒子に対する (あるいは多成分)Calogero 模型と呼ばれる. この非対称な固有状態は, 上記のボソンの場合と同様に, 基底状態の波動関数 ϕ_{g} と非対称多変数 Hermite 多項式と呼ばれる多項式 j_μ の積で書ける: $\phi_\mu(x)=\phi_{\mathrm{g}}(x)j_\mu(x)$. ここで ϕ_μ すなわち j_μ は非負整数列 $\mu=(\mu_1,\mu_2,\cdots,\mu_N)\in\mathbb{N}^N$ で指定される. これらの多変数多項式は $|\phi_{\mathrm{g}}(x)|^2$ を重み関数とした内積 $\langle .,.\rangle_{(\mathrm{H})}$ に関して直交する,

$$\langle j_\mu, j_\nu\rangle_{(\mathrm{H})}=\int_{\mathbb{R}^N} j_\mu(x)\overline{j_\mu(x)}|\phi_{\mathrm{g}}(x)|^2 dx_1dx_2\cdots dx_N=0,\quad \text{if } \mu\neq\nu.$$

このことから非対称な固有状態 ϕ_μ の直交性が直ちに分かる.

このような非対称な固有状態に対して上昇演算子を用いた代数的なアプローチを与える. 二つの演算子 A_μ^*, (μ は分割), $S_i, (1\le i\le N-1)$ を導入する. 演算子 A_μ^* を $j_0=1$ に作用させると分割 μ を持つ多項式 j_μ が得られる:

$$A_\mu^* j_0 = c\, j_\mu,\quad \mu\text{: 分割},\quad c\in\mathbb{C}.$$

一方 S_i は非負整数列 μ の成分 μ_i と μ_{i+1} を入れ替える役割を持つ:

$$S_i j_{\mu=(\cdots,\mu_i,\mu_{i+1},\cdots)} = c' j_{(\cdots,\mu_{i+1},\mu_i,\cdots)}, \quad \mu_i \neq \mu_{i+1}, \quad c' \in \mathbb{C}.$$

A^*_μ と S_i を組み合わせて用いることで, 非負整数列で指定される全ての非対称多変数 Hermite 多項式を与える Rodrigues 型の公式が得られる. 調和振動子模型と同様に, 上昇演算子 A^*_μ とその共役演算子 $(A^*_\mu)^* = A_\mu$ の積 $A_\mu A^*_\mu$ が非対称多変数 Hermite 多項式が対角化できることを用いると, 多項式の内積の対角項 $\langle j_\mu, j_\mu\rangle_{(\mathrm{H})}$ の計算が実行される. すなわち, 非対称な固有状態のノルムが得られる. 例えば, μ が分割の場合は

$$\begin{aligned}(\phi_\mu, \phi_\mu) = & \frac{(2\pi)^{\frac{N}{2}}}{(2\omega)^{|\mu|+\frac{1}{2}N(Na+(1-a))}} \prod_{i\in I} \Gamma\bigl(\mu_i + a(N-i)+1\bigr) \\ & \times \prod_{1\le i<j\le N} \frac{\Gamma\bigl(\mu_i-\mu_j+1+a(j-i+1)\bigr)\Gamma\bigl(\mu_i-\mu_j+1+a(j-i-1)\bigr)}{\Gamma\bigl(\mu_i-\mu_j+1+a(j-i)\bigr)^2}. \end{aligned} \tag{4}$$

ここで $\Gamma(z)$ はガンマ関数である.

次にハミルトニアン(3) に対して, $s_{ij} = \pm 1$ の空間を考え, ボソン, フェルミオンに対する Calogero 模型を考える. 相互作用のない量子多体系においては, 一体の固有関数の積を対称化, 反対称化することによってボソン的, フェルミオン的状態を構成することができる. この方法は一般の相互作用を持つ系に対しては適用できないが, Calogero 模型に対しては上の非対称な固有状態を対称化, 反対称化することでボソン的, フェルミオン的状態が構成できる. 多項式部分に注目すれば, 非対称多変数 Hermite 多項式の適当な線形結合を作ることでボソン的, フェルミオン的固有状態 $\Phi^\pm_\mu(x) = \phi_{\mathrm{g}}(x) J^\pm_\mu(x)$ の多項式部分, 対称, 反対称多変数 Hermite 多項式が得られる,

$$J^\pm_\mu = \sum_{\nu\in\mathfrak{S}_N(\mu)} a^\pm_{\mu\nu} j_\nu. \tag{5}$$

ここで μ は分割, ν は μ に N 次の対称群 $\mathfrak{S}_N$ を作用させて得られる非負整数列である. このようにして得られた多変数 Hermite 多項式は Lassalle, 宇治野–和達, 筧, Baker–Forrester, van Diejen らによって議論されているものと同一のものを与える. また非対称な固有状態のノルムを対称化, 反対称化することで, ボソン的, フェルミオン的固有状態のノルムが計算できる,

$$\begin{aligned}(\Phi^{(\mathrm{H})\pm}_\mu, \Phi^{(\mathrm{H})\pm}_\mu) = & \frac{(2\pi)^{\frac{N}{2}}}{(2\omega)^{|\mu|+\frac{1}{2}N(Na+(1-a))}} \prod_{i\in I} \Gamma\bigl(\mu_i + a(N-i)+1\bigr) \\ & \times \prod_{1\le i<j\le N} \frac{\Gamma\bigl(\mu_i-\mu_j+a(j-i\pm1)\bigr)\Gamma\bigl(\mu_i-\mu_j+1+a(j-i\mp1)\bigr)}{\Gamma\bigl(\mu_i-\mu_j+a(j-i)\bigr)\Gamma\bigl(\mu_i-\mu_j+1+a(j-i)\bigr)}. \end{aligned} \tag{6}$$

対称な場合のノルムは van Diejen によって得られた結果を再現している. 以上の非対称多変数 Hermite 多項式の Rodrigues 型公式の導出, 対称化, 反対称化(5), またノルムの計算(4), (6) においては, 有限次元単純リー代数のルート系とそれに作用するワイル群の性質が駆使される. また境界不純物を持つ Calogero 模型と, その固有状態の多項式部分, 多変数 Laguerre 多項式に対しても同様なアプローチが適用できる.

一方, 上記の Sutherland 模型(2) に対しても, 境界不純物, あるいは三体相互作用を入れるような拡張ができることが知られている. 数学の言葉を使えば, Sutherland 模型は全ての既約な古典ルート系に付随させて一般化できる. これらの一般化された Sutherland 模型も, ハミルトニアンを含む

可換な保存演算子を構成することにより，その量子可積分性を示すことができる．またその保存演算子の同時固有状態は基底状態の波動関数と多変数直交多項式に因子化できる．この多項式部分はHeckman–Opdam 多項式と呼ばれ，一変数の Jacobi 多項式の拡張にあたる．

一般化された Sutherland 模型の保存演算子の存在は (退化した) アフィンヘッケ代数の表現論を用いることでよく理解されている．アフィンヘッケ代数とは拡張アフィンワイル群の群環の変形であるが次のような性質を持つ:

- 可換部分代数が存在する．
- 多項式環上の差分 (微分) 演算子として表現できる．

つまりアフィンヘッケ代数を多項式に作用する演算子として表現すれば，その可換部分代数の表現として可換な演算子の組が系統的に得られる．この可換な演算子の組が上に述べた Dunkl 演算子に他ならない．

以上の内容をふまえて，一般化された Sutherland 模型の固有状態を構成する代数的なアプローチを導入する．すなわち Calogero 模型の場合と同様に，識別可能な粒子に対する一般化された Sutherland 模型を考え，その多項式部分，非対称 Heckman–Opdam 多項式に対する Rodrigues 型の公式を与え，非対称な固有状態のノルムの計算を実行する．また非対称な固有状態を対称化，反対称化しボソン的，フェルミオン的な固有状態を構成し，固有状態のノルム計算を行う．本論文では，全ての古典ルート系に付随する一般化された Sutherland 模型とその固有状態が同時に扱われる．これはアフィンリー代数に付随するアフィンルート系を Kac 流に扱ったことにより可能になる．

上のようなアプローチは CS 模型の相対論的拡張である (三角関数型) Ruijsennars 模型に対して，より威力を発揮する．Ruijsennars 模型の固有状態も，同様に基底状態の波動関数と多変数直交多項式に因子化できるが，その多項式部分は Macdonald 多項式と呼ばれる数理物理学においても重要な直交多項式で記述される．Cherednik はこの Macdonald 多項式に対してアフィンヘッケ代数のアプローチを開発し，差分演算子の構成法，多項式の重み関数の定数値，多項式の内積値などの証明を与えた．一方，Koornwinder によって導入された多項式，Macdonald–Koornwinder 多項式は 6 つのパラメータを持ち，現在知られている多変数直交多項式の中で最も一般的なものだと考えられている (すなわちパラメータの特殊化や極限操作によって既存の多項式が得られる)．Macdonald–Koornwinder 多項式を固有状態に持つ量子多体系は van Diejen によって導入され，その量子可積分性が示されている．この多項式に対してもアフィンヘッケ代数のアプローチが適用できるということは野海によって示された．本論文では Kac 流のアフィンリー代数，アフィンルート系の分類を用いることにより，Macdonald 多項式，Macdonald–Koornwinder 多項式を統一的に扱えるアフィンヘッケ代数のアプローチを導入する．また上記の固有状態を代数的に構成する方法を適用し，多項式の内積値に対する新しい証明を与える．

このように Calogero 模型，Sutherland 模型，Ruijsennars 模型に対して，その量子可積分性と固有状態に現れる多変数直交多項式に着目し，非対称的，ボソン的，フェルミオン的な固有状態を扱うための代数的なアプローチを与えた．以上が本論文の成果である．