

## 論文の内容の要旨

論文題目 Stability of a Plasma with Strong Shear Flow  
(和訳 強いシア一流をもつプラズマの安定性)

氏名 伊藤 淳

### 1 はじめに

近年、流れをもったプラズマが注目されている。核融合プラズマ研究において、Hモードや負磁気シアー配位といった高 $\beta$ 閉じ込め、抵抗性導体壁モードの安定化等の問題が重要になってきており、それらにおいてプラズマの流れが重要な役割を果たすことがわかってきた。また、宇宙プラズマでは様々な流れが観測されている。太陽コロナは多くの細かいループからなっており、それらには流れがある。また、木星の磁気圏では、強い流れによって高 $\beta$ のプラズマが閉じ込められている。このような現象は超高 $\beta$ 平衡など先進的核融合などに応用でき、プラズマ物理の新領域として様々な発展が期待される。

このような流れをもったプラズマの平衡状態は自己組織化の理論で記述される。磁化したプラズマでは磁場は Taylor 緩和状態と呼ばれる force-free (圧力ゼロ) 磁場へと向かう。しかし最近の理論では、二重 Beltrami 平衡 [1] と呼ばれる新しい緩和状態が提唱されている。これは強い流れを駆動することにより達成される高圧のシア一流をもった平衡状態である。この理論を用いて、Hモードや太陽コロナの平衡状態がモデル化されている。

プラズマのシア一流の安定性は、磁場とのカップリングによって複雑な性質を示す。シア一流は Kelvin-Helmholtz (K-H) 不安定性を引き起こし、磁場によって Alfvén 波が伝播する。K-H 不安定性は、シア一流をもつ系の非エルミート性に起因している。本論文ではシア一流をもつプラズマの安定性解析について議論する。2章では、指数関数的な不安定性を解析する。安定性のモデル方程式は K-H 不安定性と Alfvén 波を含んでいることを示す。この方程式を用いて Beltrami 流の安定性を議論する。

しかし、このような非エルミート系では、指数関数的な解析では安定性を完全に理解することはできない。また、揺らぎには背景流とのエネルギー交換があり、揺らぎに関するエネルギーが定義できない。3章では、運動の保存量を用いた安定性の解析を示す。

## 2 指数関数的不安定性

理想 MHD 方程式を以下に示す。密度は一定とする。

$$\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} = \mathbf{V} \times (\nabla \times \mathbf{V}) + \frac{1}{a^2} (\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B} - \nabla \left( \frac{\mathbf{V}^2}{2} + p \right), \quad (1)$$

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{V} \times \mathbf{B}), \quad (2)$$

磁場  $\mathbf{B}$  と流速  $\mathbf{V}$  をその代表値  $B^*$  と  $V^*$ 、空間長を装置サイズ  $L$ 、時間  $t$  を  $L/V^*$ 、圧力  $p$  を  $\rho V^{*2}$  によって規格化した。規格化パラメータ  $a = V^*/V_A$  は、Alfvén Mach 数と呼ばれる。ただし  $V_A = B^*/\sqrt{\mu_0 M n}$  は Alfvén 速度、 $M$  はイオンの質量、 $n$  は密度（一定）である。

非圧縮・スラブプラズマに対して  $z$  方向の一様性を仮定すると、磁場と速度は磁束関数  $\psi$  と流れ関数  $\varphi$  を用いて以下のように表すことができる。

$$\mathbf{B} = \nabla \psi(x, y) \times \nabla z + B_z(x, y) \nabla z$$

$$\mathbf{V} = \nabla \varphi(x, y) \times \nabla z + V_z(x, y) \nabla z$$

(1)、(2) 式は以下のように書き直せる。

$$\partial_t(-\Delta \varphi) + \{\varphi, (-\Delta \varphi)\} + \frac{1}{a^2} \{\psi, \Delta \psi\} = 0, \quad (3)$$

$$\partial_t \psi + \{\varphi, \psi\} = 0, \quad (4)$$

$$\partial_t V_z + \{\varphi, V_z\} + \frac{1}{a^2} \{B_z, \psi\} = 0, \quad (5)$$

$$\partial_t B_z + \{\varphi, B_z\} + \{V_z, \psi\} = 0. \quad (6)$$

ただし、

$$\{P, Q\} \equiv (\partial_y P) \cdot (\partial_x Q) - (\partial_x P) \cdot (\partial_y Q)$$

は Poisson の括弧と呼ばれる。  $x$  のみに依存する平衡状態  $\mathbf{B}_0 = (0, B_y, B_{z0})$ 、  $\mathbf{V}_0 = (0, V_y, V_{z0})$  を考え、方程式を線形化すると流れ関数の摂動量  $\varphi_1$  に対する安定性のモデル方程式

$$\frac{d}{dx} \left[ \left( \Omega^2 - \frac{1}{a^2} k^2 B_y^2 \right) \frac{d}{dx} \left( \frac{\varphi_1}{\Omega} \right) \right] - k^2 \left( \Omega^2 - \frac{1}{a^2} k^2 B_y^2 \right) \left( \frac{\varphi_1}{\Omega} \right) = 0 \quad (7)$$

$\Omega = \omega - kV_y$  はドップラーシフトした周波数である。  $V_y = \text{一定}$  のとき、(7) 式は Alfvén 連続スペクトルを与える方程式である [2]。  $V_y$  の  $x$  依存性によって、方程式の性質は大きく変化する。(7) 式を以下のように書く。

$$(\varphi_1'' - k^2 \varphi_1) + \frac{kV_y''}{\omega - kV_y} \varphi_1 - \frac{2k^2 B_y (B_y' \Omega + kB_y V_y')}{a^2 \Omega^2 (\Omega^2 - k^2 B_y^2 / a^2)} (\Omega \varphi_1' + kV_y' \varphi_1) = 0 \quad (8)$$

式 (8) は、磁場がない場合 ( $1/a = 0$ ) には中性流体の Rayleigh 方程式であり、Rayleigh の変曲点定理から系が不安定であれば  $V_y'' \neq 0$  であることが知られている (Kelvin-Helmholtz 不安定性) [3]。従って、(7) 式は Kelvin-Helmholtz 不安定性と Alfvén 波とのカップリングを表す式であることがわかる。この式は流れと Alfvén 波の連続スペクトルと不安定な点スペクトルをもつ。(7) 式から得られる二次形式によって、安定性の十分条件は領域内の各点で  $B_y^2/a^2 \geq V_y^2$  であることが得られる [4]。

二次元 force-free 磁場  $\mathbf{B}_0 = (0, \sin(\lambda x + \delta), \cos(\lambda x + \delta))$ 、に平行な Beltrami 流  $\mathbf{V}_0 = \mathbf{B}_0$  の安定性解析を行なった。境界  $x = 0, 1$  において  $\varphi_1 = 0$  とした。中性流体 ( $1/a = 0$ ) の場合、変曲点における流速を位相速度  $c = \omega/k$  とする中立安定な固有解 [5]

$$c_s = 0, \quad \phi_s = \sin n\pi x \quad \text{and} \quad k_s = \sqrt{\lambda^2 - n^2\pi^2} \quad (9)$$

( $n$  は整数) から、位相  $\delta$  に関係なく  $\lambda \leq \pi$  が安定性の必要十分条件である。Kelvin-Helmholtz (K-H) 不安定性の成長率は、磁場を大きくしていくと  $k_s$  を変えることなく減少し、 $1/a \geq 1$  で安定化する。図 1 は  $\lambda = 2\pi, \delta = 0$  ( $k_s = \sqrt{3}\pi$ ) のときの結果である。これは、 $1/a < 1$  を満たす磁場が存在していても  $\lambda \leq \pi$  が安定性の必要十分条件であることを示唆している。

$B_y = V_y$  ( $= U$  とする) のとき、(8) 式は

$$(U - c)(\varphi_1'' - k^2\varphi_1) - U''\varphi_1 - \frac{2cUU'}{(U - c)\{a^2(U - c)^2 - U^2\}}\{(c - U)\varphi_1' + U'\varphi_1\} = 0. \quad (10)$$

となり、中立安定な固有解が存在すれば  $c = c_s = 0$  に対しては (10) 式の左辺の最後の項は消えるので、(9) が得られる。中立安定な固有解の存在は、[3] の方法を (10) 式に適用することで証明でき、 $k_s$  よりわずかに小さな  $k$  において、成長率  $\omega_i$  は、

$$\omega_i = (1 - 1/a^2)\omega_{i0} \quad (11)$$

のように表される。ただし、 $\omega_{i0}$  は  $1/a = 0$  のときの成長率である。図 2 は  $k = 5.3$  ( $\lambda = 2\pi, \delta = 0$ ) のときの計算結果と  $\omega_i = 0.191(1 - 1/a^2)$  の曲線 (破線) を比較しており、よく一致している。以上から  $\lambda \leq \pi$  または  $1/a \geq 1$  が安定性の必要十分条件である。

磁場と流れが平行でない場合には、(8) 式において磁場  $B_y$  が Rayleigh 方程式に与える変化は複雑になる。その様子を 2 つの Beltrami 流の線形結合で表される二重 Beltrami 流によって調べた。 $\lambda_1 = 2\pi$  の渦に  $\lambda_2 \neq \lambda_1$  の渦を重ね合わせることで、(i) 不安定な渦  $\lambda_1$  の安定な渦  $\lambda_2$  による安定化、(ii) 二つの安定な渦の不安定化が起こることを示した。

安定性のモデル方程式 (7) に曲率の効果を以下のように加える。

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \left[ \left( \Omega^2 - \frac{1}{a^2} k^2 B_y^2 \right) \frac{d}{dx} \left( \frac{\varphi_1}{\Omega} \right) \right] - k^2 \left( \Omega^2 - \frac{1}{a^2} k^2 B_y^2 \right) \left( \frac{\varphi_1}{\Omega} \right) \\ + \frac{2k^2 B_y}{a^2 R_0^2} (-B_y + B_y' R_0) \frac{\varphi_1}{\Omega} = 0, \end{aligned} \quad (12)$$

$R_0$  は曲率を表す定数である。左辺第三項によって、キंक不安定性が現れる。Beltrami 流に対する安定性解析の結果を図 3、4 に示す。 $\lambda = 2\pi, R_0 = 1.5$  とした。パラメータ  $1/a$  を 0 から大きくしていくと K-H モードが安定化されるが、さらに大きくしていくとキंक不安定性が増大していく。キंक不安定性に対しては、シア一流は安定化に働いていることがわかる。

### 3 変分原理

シア一流をもつプラズマでは、背景流とのエネルギー交換によって保存量としての揺らぎのエネルギーを定義することができず、通常エネルギー原理を用いることができない。それに代わるものとして、揺らぎのエネルギーの代わりに運動の保存量(リアプノフ関数)を用いて安定性を議論する。

Beltrami 流を以下のように定義する

$$(1 - \mu_2^2) \nabla \times \mathbf{B} = \mu_1 \mathbf{B}, \quad (13)$$

$$\mathbf{v} = \mu_2 \mathbf{B}. \quad (14)$$

流速  $\mathbf{v}$  は Alfvén 速度の  $\mu_2$  倍としている。摂動量  $\tilde{\mathbf{B}}$ 、 $\tilde{\mathbf{v}}$  に対する運動の保存量は、

$$G(\tilde{\mathbf{B}}, \tilde{\mathbf{v}}) = \|\tilde{\mathbf{v}}\|^2 + \|\tilde{\mathbf{B}}\|^2 - \mu_1 \tilde{H}_1 - \mu_2 \tilde{H}_2 \quad (15)$$

である。 $\tilde{H}_1$ 、 $\tilde{H}_2$  は磁気ヘリシティ、クロスヘリシティである。この保存量を用いて、 $\tilde{\mathbf{B}}$ 、 $\tilde{\mathbf{v}}$  のノルム  $\|\tilde{\mathbf{B}}\|$ 、 $\|\tilde{\mathbf{v}}\|$  は、

$$G(\tilde{\mathbf{B}}, \tilde{\mathbf{v}}) \geq \left(1 - \mu_2^2 - \frac{|\mu_1|}{|\lambda|}\right) \|\tilde{\mathbf{B}}\|^2. \quad (16)$$

$$G(\tilde{\mathbf{B}}, \tilde{\mathbf{v}}) \geq \left(1 - \frac{\mu_2^2}{1 - |\mu_1|/|\lambda|}\right) \|\tilde{\mathbf{v}}\|^2. \quad (17)$$

から、 $1 - \mu_2^2 - |\mu_1|/|\lambda| > 0$  であれば上限が与えられる。この安定性の十分条件は、以下の2つを同時に満たすことを意味する。

$$\sigma \equiv \frac{|\mu_1|}{1 - \mu_2^2} < |\lambda|, \quad (18)$$

$$\mu_2^2 < 1. \quad (19)$$

(18) 式の  $\sigma$  は  $\mu_1 > 0$  のときの Beltrami 方程式 (13) の固有値を表している。安定性条件は  $\sigma$  が  $|\lambda_j|$  ( $\lambda_j$  は自己随伴 curl 演算子) の最小値以下であることを意味する。(19) 式の条件は流速が Alfvén 速度以下であることを表している。

### 4 まとめ

強いシア一流をもつプラズマの安定性は、非エルミート力学の解析のための新たな理論的枠組の開発を要する。本研究では、

- ◇ 非圧縮流の標準形である Rayleigh 方程式と Alfvén 波とのカップリング
- ◇ エネルギーとして閉じない(ハミルトン形式で書けない)系の安定性

に注目した解析を行ない、理論的基礎を作った。

参考文献

- [1] S. M. Mahajan and Z. Yoshida, Phys. Rev. Lett. **81**, 4863 (1998).
- [2] Z. Yoshida and S. M. Mahajan, Int. J. Mod. Phys. B **9** 2857 (1995).
- [3] P. G. Drazin and W. H. Reid, *Hydrodynamic Stability* (Cambridge University Press, Cambridge, 1981).
- [4] A. Miura and P. L. Pritchett, J. Geophys. Res. **87**, 7431 (1982).
- [5] W. Tollmien, Nachr. Wiss. Fachgruppe, Göttingen, Math.-phys. Klasse, **50** 79 (1935).

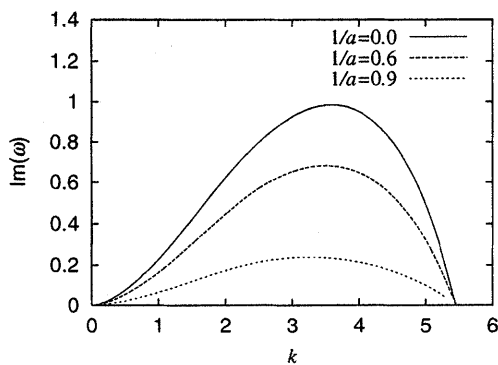


図 1: 成長率と波数  $k$  の関係

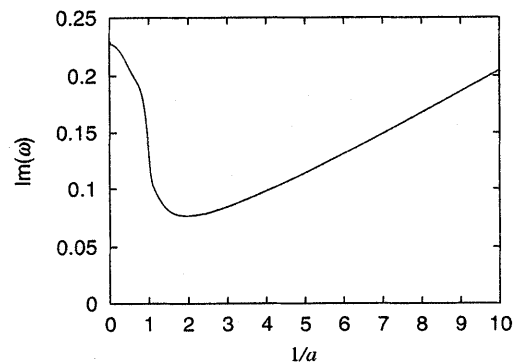


図 3:  $k = 0.01$  のときの成長率と  $1/a$  との関係

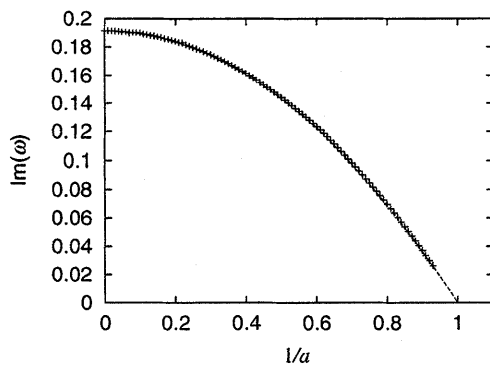


図 2:  $k = 5.3$  のときの成長率と  $1/a$  との関係

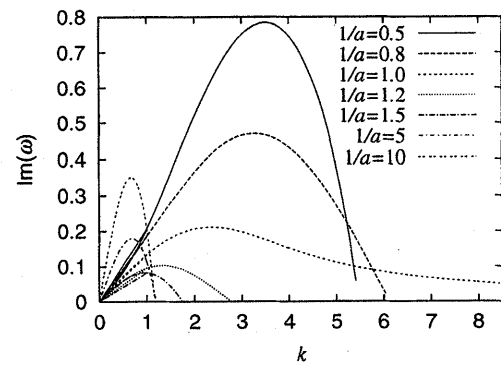


図 4: 成長率と波数  $k$  の関係