論文の内容の要旨

論文題目 Characterizations of Hardy-Orlicz spaces and applications to corona type decomposition

（Hardy-Orlicz 空間の特徴付けとコロナ型分解への応用）

氏名 今井隆太

本論文では，コロナ型問題を議論する舞台となる正則関数空間（holomorphic space）のある候補について考察する．

S.Kakutani（角谷静夫）によって予想されたコロナ問題は，1962 年に L.Carleson によって，1 変数の単位円板の場合に肯定的に解決された．しかし多変数の場合のコロナ問題は，多重円板や単位球のような基本的な領域に対しても未解決のままである．一方，多変数の場合には次善の策として，コロナ解を H^∞ よりも少し大きい関数空間である Hardy 空間 H^p の中に見付けるという問題設定が行われた．これを H^p-コロナ型問題と呼ぶ．現在までのところ，H^p-コロナ型問題は，Amar, Anderson, Krantz-Li ら多くの数学者によって肯定的に解かれている．

それでは，X-コロナ解を持つような正則関数空間 X で H^∞ に近付くことはできるかという問題が考えられる．つまり，H^p 以外の正則関数空間 X でコロナ解の評価が得られるかという問題である．これが本論文の動機付けであり，より自由に H^∞ へ近付く正則関数空間の候補として，Hardy-Orlicz 空間 H_ϕ を考察の対象とする．

以下では，とくに断らない限り ϕ は Δ_2-条件及び ∇_2-条件を満たす N-関数とする．また，$\Omega \subset \boldsymbol{C}^n$ を C^3-級の滑らかな境界を持つ有界強擬凸領域とする．このとき，Hardy-Orlicz 空間 $H_\phi(\Omega)$ を次のように定義する．

$$H_\phi(\Omega) = \left\{ f \in \mathcal{O}(\Omega) : \limsup_{\varepsilon \to 0} \int_{\partial\Omega_\varepsilon} \phi(|f|)d\sigma_\varepsilon < \infty \right\}.$$

明らかに $f \in H_\phi(\Omega)$ は Nevanlinna 族に属するので，境界上のほとんど到るところで非接境界値を持つ．従って，Hardy-Orlicz 空間 $H_\phi(\Omega)$ の関数を境界 $\partial\Omega$ 上の関数と同一視する．

本論文では，Hardy-Orlicz 空間 $H_\phi(\Omega)$ の性質を調べて，いくつかの特徴付けを与えるために，実関数論的手法を積極的に適用している．とくに，Marcinkiewicz の補間定理を Orlicz 空間の場合に改良し，Orlicz 空間における Marcinkiewicz 型補間定理の応用として主な結果を得ている．

そこで先ず始めに，Orlicz 空間における Marcinkiewicz 型補間定理を示す．

定理
$\phi, \phi_1, \phi_2 \in \Delta_2 \cap \nabla_2$ を N-関数とし，$\sup_{\lambda>0} \frac{\varphi(\lambda)\phi_1(\lambda)}{\phi(\lambda)\varphi_1(\lambda)} < 1$, $\inf_{\lambda>0} \frac{\varphi(\lambda)\phi_2(\lambda)}{\phi(\lambda)\varphi_2(\lambda)} > 1$ を満たすとする．また，準加法的作用素 T は弱 (ϕ_1, ϕ_1) 型かつ弱 (ϕ_2, ϕ_2) 型とする．このとき，作用素 T は *Orlicz* 空間 $L_\phi(X)$ 上で有界になる．

$$\int_Y \phi(|Tf|)d\mu_Y \leq C \int_X \phi(|f|)d\mu_X, \quad (f \in L_\phi(X)).$$

Lebesgue 空間 L^p と L^q の間にある Orlicz 空間 L_ϕ への補間定理については，例えば Rao-Ren や Genebashvili らの結果が知られているが，包含関係を規定する条件などが本定理と異なっている．

この Orlicz 空間における Marcinkiewicz 型補間定理は，極大作用素や特異積分作用素と組み合わせることで Hardy-Orlicz 空間 $H_\phi(\Omega)$ の特徴付けの有効な道具となっている．先ず，近似定理による特徴付けとして次を得た．

定理
$\phi \in \Delta_2 \cap \nabla_2$ とする．このとき，*Hardy-Orlicz* 空間 $H_\phi(\Omega)$ の関数は，境界 $\partial\Omega$ 上の関数として $A(\partial\Omega)$ の関数で *Luxemberg* ノルムに関して近似される．つまり，次が成り立つ．

$$H_\phi(\Omega) \cong [A(\partial\Omega)]_{L\phi}(\partial\Omega).$$

ここで，$A(\partial\Omega)$ は $C(\overline{\Omega}) \cap \mathcal{O}(\Omega)$ の境界 $\partial\Omega$ への制限であり，$[A(\partial\Omega)]_{L\phi}(\partial\Omega)$ は $A(\partial\Omega)$ の *Luxemberg* ノルム $\|\cdot\|_{(\phi)}$ に関する閉包とし，$\cong$ は境界 $\partial\Omega$ 上の関数空間として等しいこととする．

また，Szegö 射影による特徴付けとして次を得た．

定理
$\phi \in \Delta_2 \cap \nabla_2$ とする．このとき，*Hardy-Orlicz* 空間 $H_\phi(\Omega)$ は，*Orlicz* 空間 $L_\phi(\partial\Omega)$ の *Szegö* 射影 S による像と一致する．

$$SL_\phi(\partial\Omega) = H_\phi(\Omega).$$

更に，この Szegö 射影による特徴付けと補間定理を組み合わせることで，Hardy-Orlicz 空間上の作用素に対する補間定理を得た．

定理
$\phi, \phi_2 \in \Delta_2 \cap \nabla_2$ が $\sup_{\lambda>0} \frac{\varphi(\lambda)\phi_2(\lambda)}{\phi(\lambda)\varphi_2(\lambda)} < 1$ を満たすとする．このとき，$H^1(\Omega)$ 及び $H_{\phi_2}(\Omega)$ 上で定義された準加法的作用素 B が弱 $(1,1)$ 型かつ弱 (ϕ_2, ϕ_2) 型ならば，B は $H_\phi(\Omega)$ 上で定義され，次を満たす．

$$\int_{\partial\Omega} \phi(|Bf|)d\sigma \leq C \inf \left\{ \int_{\partial\Omega} \phi(|g|)d\sigma \,:\, g \in L_\phi(\partial\Omega)\, s.t.\, f = Sg \right\}.$$

現在のところ H^p-コロナ型問題が肯定的に解かれており，とくに H^p-コロナ解を与える構成手続きが積分作用素として表されることが知られている．従って，上述の定理の系として，Δ_2 かつ ∇_2 条件という moderate な増大度をもつ Hardy-Orlicz 空間 $H_\phi(\Omega)$ が $H_\phi(\Omega)$-コロナ解をもつことが証明される．

定理
$\phi \in \Delta_2 \cap \nabla_2$ とし，$G_1, \cdots, G_m \in H^\infty(\Omega)$ をコロナデータとする．つまり，
$\sum_{i=1}^m |G_i(z)|^2 \geq \delta > 0, \quad (z \in \Omega)$ を満たすとする．このとき，有界な積分作用素
$T_i : H_\phi(\Omega) \to H_\phi(\Omega), (i = 1, \cdots, m)$ が存在して，

$$\sum_{i=1}^m G_i(z) T_i f(z) = f(z), \quad (f \in H_\phi(\Omega))$$

が成り立つ．更に次が成り立つ．

$$\int_{\partial\Omega} \phi(|T_i f|) d\sigma \leq C \inf \left\{ \int_{\partial\Omega} \phi(|g|) d\sigma \,:\, g \in L_\phi(\partial\Omega) \; s.t. \; f = Sg \right\}.$$

こうして，Hardy-Orlicz 空間 $H_\phi(\Omega)$ が $H_\phi(\Omega)$-コロナ解をもつためには $\phi \in \Delta_2 \cap \nabla_2$ が十分条件であることが示される．それでは，増大度を上から制限する Δ_2 条件を課すことは妥当であろうか？という問題が考えられる．この問題に対する回答のひとつとして次を得た．

定理
ϕ を N-関数とする．このとき，*Szegö* 射影 S が弱 (ϕ, ϕ) 型，つまり，

$$\phi(\lambda)\sigma(\{|Sf| > \lambda\}) \leq C_1 \int_{\partial\Omega} \phi(C_2|f|) d\sigma, \quad (\lambda > 0, f \in L_\phi(\partial\Omega))$$

ならば，$\phi \in \Delta_2$ となる．

また，$G_1, \cdots, G_m \in H^\infty(\Omega)$ を $\sum_{i=1}^m \|G_i\|_\infty < 1$ となるコロナデータとし，$T_i : H^\infty(\Omega) \to H^1(\Omega), (i = 1, \cdots, m)$ を $h = \sum_{i=1}^m G_i T_i h$ を充たす線型作用素とするとき，次を得た．

定理
ϕ を N-関数とする．このとき，各作用素 T_i が次を満たすとする．

$$\phi(\lambda)\sigma(\{|T_i f| > \lambda\}) \leq C \int_{\partial\Omega} \phi(|f|) d\sigma, \quad (\lambda > 0, f \in L_\phi(\partial\Omega)).$$

このとき，$\phi \in \Delta_2$ となる．

更に，Hardy-Littlewood の極大作用素が $L_\phi(\partial\Omega)$ 上で有界であるためには ϕ が ∇_2-条件を満たすことが必要十分であることも知られている．

さて，正則関数空間上の典型的な作用素である Toeplitz 型作用素及び Hankel 型作用素は Hardy-Orlicz 空間上でどのように振る舞うであろうか．ここで，Toeplitz 型作用素及び Hankel 型作用素とは以下のように定められるとする．つまり，Henkin-Ramirez の積分核を $\frac{K(\zeta,z)}{\Phi(\zeta,z)^n}$ とするとき，$g \in L^\infty(\partial\Omega)$ をシンボルとする Toeplitz 型作用素 T_g は，

$$T_g f(z) = \int_{\partial\Omega} \frac{K(\zeta, z)}{\Phi(\zeta, z)^n} g(\zeta) f(\zeta) d\sigma(\zeta)$$

とする．$T_g f$ が境界上のほとんど到るところで（非接）境界値をもつとき，Hankel 型作用素は

$$H_g f(\zeta) = g(\zeta) f(\zeta) - T_g f(\zeta)$$

とする．T_g 及び H_g の Hardy-Orlicz 空間上の性質を調べるために，g の連続性の新しい概念を導入する．即ち，Dini 関数という連続性をより精密化して，$\psi \in \Delta_2$ に対する ψ-Dini 関数という連続性を導入する．$g \in C(\partial\Omega)$ が ψ-Dini 関数であるとは，

$$\int_0^\delta t^{2n-1} \psi \left(\frac{\omega_g(t)}{t^{2n}} \right) dt < \infty$$

が成り立つこととする．このとき，次を得た．

定理
$\phi \in \nabla_2$ と $\psi \in \Delta_2$ を互いに相補的な N-関数とし，g を $\partial\Omega$ 上の *ψ-Dini* 関数とする．このとき，次が成り立つ．

(a) *Hankel* 型作用素 H_g は，$H_\phi(\Omega)$ の閉単位球を $C(\overline{\Omega})$ の同程度連続な部分集合に写像する．

(b) *Toeplitz* 型作用素 T_g は，$H^*_\phi(\Omega)$ を $H^*_\phi(\Omega)$ に，$H^+_\phi(\Omega)$ を $H^+_\phi(\Omega)$ にそれぞれ写像する．

(c) $\int_{\partial\Omega} \phi(|H_g f|) d\sigma \le C_1 \int_{\partial\Omega} \phi(C_2|f|) d\sigma, (f \in H^*_\phi(\Omega))$.

(d) $\|T_g f\|_{(\phi)} \le C \|f\|_{(\phi)}, (f \in H^*_\phi(\Omega))$.

系
g が *Lipschitz* 関数のとき，次が成り立つ．

(a) T_g は $BMOA$ を $BMOA$ に写像する．

(b) $\int_{\partial\Omega} \phi(|H_g f|) d\sigma \le C_1 \int_{\partial\Omega} \phi(C_2|f|) d\sigma, (f \in H^*_\phi(\Omega), \phi \in \nabla_2)$.

(c) $\|T_g f\|_{(\phi)} \le C \|f\|_{(\phi)}, (f \in H^*_\phi(\Omega), \phi \in \nabla_2)$.

Hardy-Orlicz 空間上の Toeplitz 型作用素に関する上述の定理の応用として，Hardy-Orlicz 空間に対しても Gleason 問題が解ける．領域 $\Omega \in \boldsymbol{C}^n$ 上の正則関数空間 X に対する Gleason 問題とは，任意の $f \in X$ と任意の $a \in \Omega$ に対して，$f(z) - f(a) = \sum_{i=1}^n (z_i - a_i) g_i(z), (z \in \Omega)$ となる $g_i \in X, (i = 1, \cdots, n)$ が存在するかどうかという問題である．

定理
次の正則関数空間 X に対して，*Gleason* 問題が解ける．

(a) $X = H^+_\phi(\Omega), H^*_\phi(\Omega)$. ここで，$\phi \in \nabla_2$ である．

(b) $X = BMOA$.

これらの結果は，Szegö 射影などの場合と異なり，必ずしも Δ_2 条件を満たすとは限らない（真に大きい増大度をもつ）Hardy-Orlicz 空間に対しても成り立つ結果である．

その他の関連話題としては，(1) Carleson-Hörmander の不等式の Hardy-Orlicz 空間版，(2) Hardy-Orlicz 空間の別の流儀による定義（Hasumi-Kataoka の結果の多変数の単位球への拡張）などに関して得られた結果を述べる．