

論文審査の結果の要旨

氏名 今井隆太

提出論文の題目は Characterizations of Hardy-Orlicz spaces and applications to corona type decomposition である。この論文では、Hardy-Orlicz 空間のいくつかの特徴づけ、ならびにそのコロナ問題、Toeplitz 作用素、Gleason 問題への応用が与えられた。

本論文における学位申請者の研究の動機は、実解析学と複素解析学にまたがる重要な未解決問題の一つであるコロナ問題にある。この問題は、 Ω を n 次元複素空間 C^n の領域としたとき、 Ω 上の有界正則関数 f_1, \dots, f_N で、ある定数 $\delta > 0$ が存在し、 Ω のすべての点 z に対して $|f_1(z)| + \dots + |f_N(z)| \geq \delta$ が成り立つとき、 $f_1 g_1 + \dots + f_N g_N = 1$ なる有界正則関数 g_1, \dots, g_N が存在するか? というものである。 f_1, \dots, f_N をコロナ・データといい、 g_1, \dots, g_N をそのコロナ解という。コロナ問題は、 Ω が単位円板の場合はずでに 1962 年に L. Carleson によって肯定的に解かれているが、多変数の場合、たとえば単位球、多重円板でコロナ問題が正しいか否かは現在のところ未解決である。現在までにある多変数の場合の研究方向の一つは、コロナ解を有界正則関数の中から見出すことが困難なため、それを Hardy 空間 H^p から見出すというものである。この方向の研究としては、E. Amar, M. Andersson, H. Carlsson らのものが知られている。申請者の論文では、Hardy 空間よりもよりコロナ問題に直接的にアプローチできるであろう Hardy-Orlicz 空間 H_ϕ を用いて問題を研究することを目的に、この関数空間が系統的に研究されている。さらにコロナ問題に対する新たな部分的結果をはじめ、さまざまな応用も与えられている。

申請論文の内容を詳しく述べる。本申請論文では主に C^n の C^3 級の境界をもつ有界擬凸領域 Ω 上の Hardy-Orlicz 空間が扱われている。まず Hardy-Orlicz 空間の基本的な性質を Henkin による積分核の理論と実解析的方法を用いることにより導いている。たとえば Hardy-Orlicz 空間に属する関数が境界までこめて連続な Ω 上の正則関数で Hardy-Orlicz 空間の Luxemburg ノルムで近似できるという基本的な結果が証明されている。また実解析学の古典的な定理の一つである Marcinkiewicz の補間定理をモデルに Orlicz 空間に関する補間定理を改良し、それをもとに Hardy-Orlicz 空間の理論を深めた。たとえば、Hardy-Orlicz 空間が Orlicz 空間

の Szegoe 射影による像と一致していること，さらにそれを用いて Hardy-Orlicz 空間の双対空間を求めるという Hardy-Orlicz 空間を今後研究する上で，基礎的でありかつ重要な結果が証明されている．これらが申請論文の主に前半に記されている結果である．申請論文の後半では，前半の結果を基にして，まずコロナ型分解が論じられている．コロナ型分解はコロナ問題を一般化した形の分解で，これが有界正則関数に対して成り立てばコロナ問題が肯定的に解けるというものである．これまで知られている結果は Hardy 空間に対するコロナ型分解であるが，申請論文においてそれが Hardy-Orlicz 空間で成り立つことが証明された．さらに申請論文ではコロナ型分解を与える線形作用素について，それが弱 (ϕ, ϕ) 型評価をみたすためのある種の必要条件まで証明されている．これはコロナ型分解を Hardy 空間の範疇で議論していたのでは見えなかったことである．この他，Szegoe 射影に対しても同様の結果を証明している．申請論文では今まで述べてきた結果に加えて，Henkin-Ramirez 核を積分核とする Toeplitz 型作用素への応用も与えている．Toeplitz 作用素の研究は作用素論と複素解析にまたがるテーマで，さまざまな研究がなされているが，申請論文では本論文で構築してきた Hardy-Orlicz 空間の理論を適用して，Toeplitz 型作用素が Hardy-Orlicz 空間で有界になるための表象の十分条件を見出した．さらにそれを応用して，Hardy-Orlicz 空間ならびに BMOA で Gleason 問題が解けることが証明された．この他にも，付随的な成果として Carleson-Hörmander 型不等式の Hardy-Orlicz 空間への一般化，単位円板上の Hardy-Orlicz 空間に関する Hasumi-Kataoka の定理の強擬凸領域への一般化なども証明されている．

本論文で得られている数々の結果は，今後の多次元複素領域における Hardy-Orlicz 空間の研究の基礎となる重要なものである．よって論文提出者今井隆太は，博士（数理科学）の学位を受けるにふさわしい十分な資格があると認める．