論文の内容の要旨

論文題目　On the topology of sphere type fold maps of 4-manifolds into the plane

(4次元多様体から平面への球面型折り目写像のトポロジーについて)

氏名　　鈴岡　啓一

1 序

多様体上には Morse 関数と呼ばれるすべての特異点が非退化であるような実数値関数が存在する。この特異点は孤立特異点であり、その近傍での関数の性質は特異点の指数に集約される。Morse 理論 (cf.[12]) により多様体はこの孤立特異点とその指数に対応したいくつかのハンドルに分解される。すなわち関数とその特異点の情報により多様体のトポロジーに関する重要な情報が得られると考えられる。Thom [20] はこれを実数値関数から一般の多様体間の写像へと拡張するという問題を考えた。この問題に関して、我々は特に4次元多様体から平面への写像について、その特異点から多様体のトポロジーについてどの様な情報が得られるのかを考える。この場合に関してはすでに結果いくつかの結果が知られている。(cf. [2, 3, 4, 6, 7, 8, 13, 14, 20])

2 4次元多様体から平面への安定写像とその Stein 分解

以下すべての M^4 は向き付けられた連結かつ閉じた4次元多様体であるとする。M^4 から平面への C^∞ 級写像全体を $C^\infty(M^4, \mathbf{R}^2)$ と書きそこに Whitney C^∞ を位相を入れる。$C^\infty(M^4, \mathbf{R}^2)$ には自然に $Diff(M^4) \times Diff(\mathbf{R}^2)$ が作用する。$f \in C^\infty(M^4, \mathbf{R}^2)$ が安定写像であるとは、この作用による f の軌道空間が開集合になることである。Mather [11] により安定写像全体の集合は $C^\infty(M^4, \mathbf{R}^2)$ の中で開かつ稠密な部分集合になることが知られている。$f \in C^\infty(M^4, \mathbf{R}^2)$ とする。

$p \in M^4$ が f の特異点であるとは $rankdf_p < 2$ であることであり特異点のなす集合を $S(f)$ と書く。f が安定写像であることは以下の性質を満たすことと同値であることが知られている。([5])。

任意の $p \in S(f)$ に対して、(L_1) または (L_2) のいずれかが成り立ち、かつ (G_1) かつ (G_2) を満たす。p の座標近傍 (u, z_1, z_2, z_3) で原点が p であり $f(p)$ の座標近傍 (U, Y) で $f(p)$ が原点になるものが存在して (L_1) $U \circ f = u, Y \circ f = \sum \pm z_i^2$, ($p$ を折り目特異点と呼ぶ)

p の座標近傍 (u, x, z_1, z_2) で原点が p であり $f(p)$ の座標近傍 (U, Y) で $f(p)$ が原点になるものが存在して (L_2) $U \circ f = u, Y \circ f = x^3 + xu + \sum \pm z_i^2$ (p をカスプ型特異点と呼ぶ)

(G_1) すべてのカスプ型特異点 p に対し　$f^{-1}f(p) \cap S(f) = \{p\}$

(G_2) $f|_{(S(f) \setminus \text{cusp points})}$ が正則なはめ込みである。

p を折り目特異点とするとき、(L_1) の和の記号内のすべての正負が一致していれば p を定値折り目特異点と呼び、そうならない時 p を非定値折り目特異点と呼ぶ。

定義 (Stein 分解) M^4 の点に対して安定写像 f により次の同値関係を導入する。$P_0, P_1 \in M^4$ に対し $f(P_0) = f(P_1) = Q$ かつ P_0 と P_1 が $f^{-1}(Q)$ の同じ連結成分に含まれる時 P_0 と P_1 が同値であるとする。この同値関係による商空間 W_f が定義され、商写像 $q_f : M^4 \to W_f$ が以下の図式を可換にする $\bar{f} : W_f \to \mathbf{R^2}$ を誘導する。

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{f} & \mathbf{R}^p \\ & q_f \searrow \quad \nearrow \bar{f} & \\ & W_f & \end{array}$$

この図式による写像 f の分解、または商空間 W_f 自身のことを Stein 分解と呼ぶ。

定義 (折り目写像)　f のすべての特異点が折り目特異点の時 f を折り目写像と呼ぶ。特に、すべての特異点が定値折り目特異点の時、f をスペシャルジェネリック写像と呼ぶ。

定義 (球面型折り目写像)　f を折り目写像とする。任意の $q \in f(M^4 \setminus f(S(f))$ に対し $f^{-1}(q)$ がいくつかの S^2 の直和となる時、f を球面型折り目写像と呼ぶ。

注意　1　球面型折り目写像 (sphere type fold map) はこの論文において定義されたものである。

注意　2　スペシャルジェネリック写像は常に球面型折り目写像である。

3　主定理

この論文では以下の定理を得た。

定理　Stein 分解 $q_f : M^4 \to W_f$ が誘導する、基本群の準同型写像 $(q_f)_* : \pi_1(M) \to \pi_1(W_f)$ は同型写像である。

注意　f がスペシャルジェネリック写像の時に上の定理が成立することはすでに知られていた。cf. [13, 14] 従ってこの論文では、これを球面型折り目写像の場合に拡張したことになる。

またこの論文では以下の問題について考察した。

問題　曲線の平面へのはめ込みを与えた時、それが特異点の像になる球面型折り目写像を持つのはどのような多様体か。

これに対しては以下の結果を得た。

定理　図１の平面曲線に対して１番外側の円周が定値折り目特異点の像になり、それ以外の曲線が非定値折り目特異点の像になる球面型折り目写像を持つ M^4 は $S^2 \times S^2$ か $S^2 \tilde{\times} S^2$ に微分同相である。またここで考察した球面型折り目写像により M^4 内の２つの成分を持つ２次元絡み目でその補空間が S^1 上のファイバーバンドルの構造を持ちファイバーが $(S^1 \times S^2) \setminus (D^3 \coprod D^3)$ になるものが存在することを指摘した。

同様に次の結果を得た

定理　図２の 平面曲線に対して１番外側の円周が定値折り目特異点の像になり、それ以外の曲線が非定値折り目特異点の像になるような、球面型折り目写像をもつ M^4 は、その Stein 分解の位相により２つのケースに別れる

1.Stein 分解により誘導された商空間が円盤とトーラスとアニュラスの張り合わせでできるものの時 $S^2 \times S^2$ か $S^2 \tilde{\times} S^2$　のいずれかに微分同相である。

2..Stein 分解により誘導された商空間が円盤とクラインの壺とアニュラスの張り合わせでできるものの時 $\mathbf{RP^2}$ 上の S^2 バンドルの全空間でかつ向きづけ可能なもののうちいずれかに微分同相である。

またここで考察した球面型折り目写像により M^4 内の２次元結び目でその補空間が S^1 上のファイバーバンドルの構造を持ちファイバーが
$(S^1 \times S^2) \setminus D^3$ になるものが存在することを指摘した。

参考文献

[1] J. M. Èliašberg, *On singularities of folding type*, Math. USSR-Izv. **4** (1970), 1119–1134.

[2] J. M. Èliašberg, *Surgery of singularities of smooth mappings*, Math. USSR-Izv. **6** (1972), 1302–1326.

[3] T. Fukuda, *Topology of folds, cusps and Morin singularities*, in "A Fete of Topology", eds. Y. Matsumoto, T. Mizutani and S. Morita, Academic Press, 1987, pp.331–353.

[4] Y. K. S. Furuya, *Sobre aplicações genéricas* $M^4 \to \mathbf{R}^2$, Doctor Thesis, ICMSC, University of São Paulo, 1986. 591–631.

[5] M. Golubitsky and V. Guillemin, Stable mappings and their singularities, Grad. Texts in Math. 14, Springer, New York, Heidelberg, Berlin, 1973.

[6] M. Kobayashi, *Simplifying certain mappings from a simply connected* 4*-manifold into the plane*, Tokyo J. Math. **15** (1992), 327–349.

[7] M. Kobayashi and O. Saeki, *Simplifying stable mappings into the plane from a global viewpoint*, Trans. Amer. Math. Soc. **348** (1996), 2607–2636.

[8] H. Levine, *Elimination of cusps*, Topology **3** (suppl. 2) (1965), 263–296.

[9] H. Levine, *Mappings of manifolds into the plane*, Amer. J. Math. **88** (1966), 357–365.

[10] H. Levine, Classifying immersions into $\mathbf{R}^4$ over stable maps of 3-manifolds into $\mathbf{R}^2$, Lect. Notes in Math. 1157, Springer, Berlin, 1985.

[11] J. N. Mather, *Stability of C^∞ mappings: VI, the nice dimensions*, Lect. Notes in Math. 192, Springer, 1971, pp.207–253.

[12] J. Milnor, Morse theory, Ann. of Math. Stud. 51, Princeton Univ. Press, 1963.

[13] P. Porto and Y. K. S. Furuya, *On special generic maps from a closed manifold into the plane*, Topology Appl. **35** (1990), 41–52.

[14] O. Saeki, *Topology of special generic maps of manifolds into Euclidean spaces*, Topology Appl. **49** (1993), 265–293.

[15] O. Saeki, *Notes on the topology of folds*, J. Math. Soc. Japan **44** (1992), 551–566.

[16] O. Saeki, *Simple stable maps of* 3*-manifolds into surfaces*, Topology.

[17] O. Saeki, *Simple stable maps of* 3*-manifolds into surfaces II*, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo **40** (1993), 73–124.

[18] O. Saeki, *Studying the topology of Morin singularities from a global viewpoint*, Math. Proc. Camb. Phil. Soc. **117** (1995), 223–235.

[19] K. Sakuma, *On the topology of simple fold maps*, Tokyo J. Math. **17** (1994), 21–31.

[20] R. Thom, *Les singularités des applications différentiables*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) **6** (1955–56), 43–87.

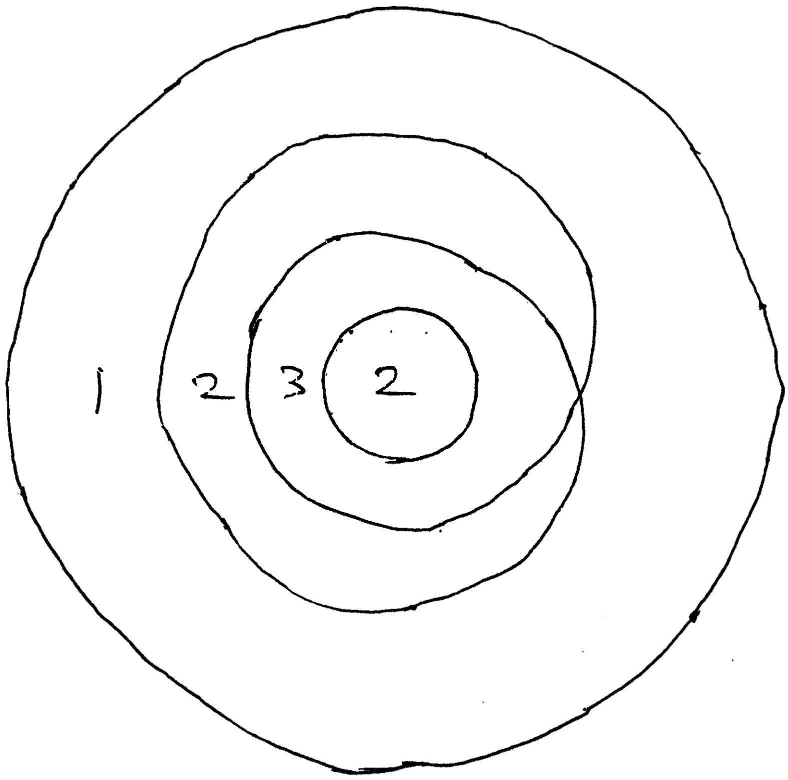

図1

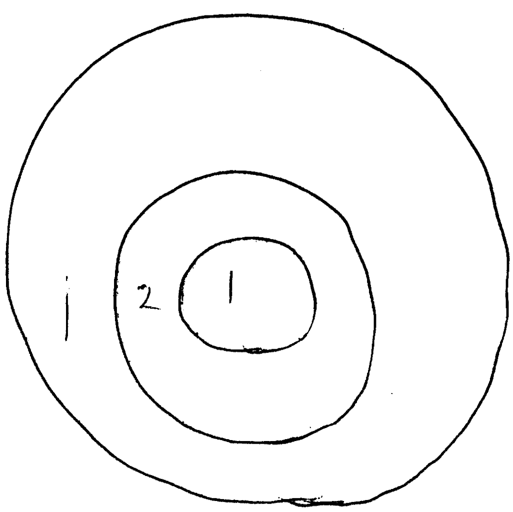

図2