論文審査の結果の要旨

氏名　鈴岡　啓一

有限次元に限って解釈すると，古典的なMorse理論は，多様体Mから実数直線$\mathbb{R}$への安定写像$M \to \mathbb{R}$の研究と考えることができる．1950年代にR.Thomはこの研究を，閉多様体Mから別の多様体Nへの写像$f : M \to N$を通して，多様体Mのトポロジーを研究するシナリオへと拡張した．この方向での研究はその後，さまざまなヴァリエーションを生んでいる．その多くのものは，標的となる多様体Nとしてユークリッド空間$\mathbb{R}^p$をとるものである．

C^∞級写像$f : M \to \mathbb{R}^p$の臨界点qが折り目臨界点であるとは，qと$f(q)$のまわりの局所座標によって，fが標準的に

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n) \mapsto (x_1, \ldots, x_{p-1}, \pm x_p^2 \pm \cdots \pm x_n^2)$$

という形に書けることである．そして，$f : M \to \mathbb{R}^p$の全ての臨界点が折り目臨界点であるとき，fを折り目写像という．

上記のThomのシナリオの特別の場合として，多様体Mからユークリッド空間$\mathbb{R}^p$への折り目写像$f : M \to \mathbb{R}^p$に基づいてMのトポロジーを調べるという研究がある．特に，折り目写像fの全ての臨界点において，その局所表示の$\pm x_p^2 \pm \cdots \pm x_n^2$の部分が定値であるとき，すなわち，$x_p^2 + \cdots + x_n^2$であるとき，$f : M \to \mathbb{R}^p$はスペシアル・ジェネリック写像と呼ばれる．

このいささか自己矛盾したような呼称はO.BurletとG.de Rham(1974)によるものであるが，彼等は3次元多様体M^3から$\mathbb{R}^2$へのスペシアル・ジェネリック写像が存在するという条件のもとで，3次元多様体M^3の構造を調べた．スペシアル・ジェネリック写像の研究は，P.Porto, Y.K.S.Furuya, 佐伯　修　達により引き継がれている．

スペシアル・ジェネリック写像より一般の折り目写像に関しても，J.M.Éliasberg, H.Levine, 佐伯　修　達の研究があるが，まだそれほど多くのことが分かっているわけではない．

提出された論文において，スペシアル・ジェネリック写像と一般の折り目写像の中間に位置する球面型折り目写像（spherical fold maps）の概念が導入された．これは次元対(n, p)が$(4, 2)$という特別の場合に限り導入されたものであるが，そのままでは極めて見難い4次元多様体を平面上に素描することに相当している．その定義は次のように述べられる．折り目写像$f : M^4 \to \mathbb{R}^2$が

球面型であるとは，$f(M)$ に含まれる任意の正則値 p の逆像 $f^{-1}(p)$ が有限個の 2 次元球面の非交和になることである．

論文では，球面型折り目写像 $f: M^4 \to \mathbb{R}^2$ が与えられたとき，平面上に描かれた臨界値の曲線の形状と，それによって区切られた平面の領域にその領域に属する正則値の逆像の連結成分の個数を割り当てた図から，もとの 4 次元多様体を復元する方法をいくつかの具体例に基づいて研究している．

特に興味ある場合は，臨界値曲線が図 1 のように与えられている場合である．この図については，次の事実が証明されている．

定理：図 1 により与えられる 4 次元多様体は 2 次元球面の直積 $S^2 \times S^2$ または球面上の非自明な球面束 $S^2 \tilde{\times} S^2$ のどちらかであり，しかもどちらの多様体も図 1 の表示をもつ．

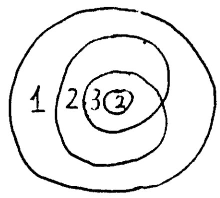

図 1: $S^2 \times S^2$ および $S^2 \tilde{\times} S^2$ の表示

この例が興味ある一つの理由は，この図の「中心点」の逆像は二つの 2 次元球面の非交和であり，それが M^4 のなかのファイバー絡み目になっていることが図から直ちに見てとれることである．

平面上の臨界値曲線から M^4 を復元するとき，基本群の理解が意外に難しい．図 1 の場合，上記のファイバー絡み目の構造に即して考えるとあたかも $\pi_1(M^4) \cong \mathbb{Z}_2$ であるかように見えるが，実際には M^4 は単連結である．このような基本群に関する考察は次の定理に一般化されている．

定理：$f: M^4 \to \mathbb{R}^2$ を球面型折り目写像とし，$M^4 \to W_f \to \mathbb{R}^2$ をその Stein 分解とすれば，自然な写像は基本群の同型 $\pi_1(M^4) \cong \pi_1(W_f)$ を導く．

初めの例における 4 次元多様体 M^4 の復元は，与えられた $f: M^4 \to \mathbb{R}^2$ の臨界値曲線の図を，Morse 関数の臨界値集合を原点のまわりに回転させたものとみることから出発する．そして，動径の逆像として与えられる 3 次元多様体の間のモノドロミーを用いて，M の Kirby 図式を構成するのである．このように，提出された論文は，写像の特異性を通して多様体のトポロジーを研究する分野に， 新しい研究方法と対象をもたらしたものと考えられる．

よって，論文提出者　鈴岡　啓一　は，博士（数理科学）の学位を受けるにふさわしい充分な資格があると認める．