論文の内容の要旨

論文題目： Collapsing of Riemannian manifolds and the eigenvalues of the Laplacian on p-forms

(和訳：リーマン多様体の崩壊と p-形式のラプラシアンの固有値)

氏　名：　髙　橋　淳　也

コンパクト Riemann 多様体の幾何とその上の関数に作用する Laplacian の固有値との関係は良く知られている．例えば，正の第 1 固有値は Ricci 曲率の下限と直径の上限を用いて下から評価できる．ところが，微分形式に作用する Laplacian の固有値において同様の問題を考えた場合，もはやこれらの幾何学的量では評価できない．これは，微分形式の固有値が，関数の場合とは異なる幾何学的情報を含んでいることを意味する．しかし，その詳細は不明である．

一方，さらに単射半径の下限を用いると，Anderson と Cheeger (1992) によるコンパクト性定理から，微分形式の正の固有値は下から評価できる（Lott (1999)）．しかし，この評価は微分形式の次数 p に依らない一様な評価のため，各次数 p の幾何学的情報を反映した形ではない．従って，ベストな評価ではない．そこで，単射半径の条件を外した族，すなわち，崩壊における p-形式の固有値の振る舞いを調べることが重要であると考えられる．

関数に作用する Laplacian の固有値の場合は，Cheeger と Colding (2000) によって，Ricci 曲率が下に有界で直径が上に有界な Riemann 多様体の列が測度付き Gromov-Hausdorff 収束すると，対応する Laplacian の固有値も収束することが証明された．一方，微分形式に作用する Laplacian の場合は，固有値の振る舞いは関数の場合ほど良く分かっていない．状況はより複雑である．最近，Lott (1999) は，断面曲率が上下一様に有界で固定された直径の崩壊における微分形式に対する固有値の収束定理を証明した．

そこで，我々は断面曲率が下にのみ有界な族における崩壊と微分形式の固有値の収束問題に興味がある．しかし，一般的状況でこれを調べるのは難しいように思われる．そこで，我々は大きい固有値と小さい固有値という 2 つの興味深い現象を調べることにした．ここで，大きい固有値とは，断面曲率が下に有界で直径が有界な崩壊において，∞ へ発散する固有値のこと，また，小さい固有値とは 0 へ収束する（正の）固有値のことである．大きい固有値の研究は Lott (1999) により，また，小さい固有値の研究は Colbois と Courtois (1990) によって始められた．もちろん，関数の固有値の場合には，大きい固有値，小さい固有値ともに存在しない．

さて，(M,g) を m 次元の連結，向き付けられた，閉 Riemann 多様体とし，$\lambda_k^{(p)}(M,g)$ で (M,g) 上の p-形式に作用する Laplacian の正の（重複度込みで数えた）第 k 番目の固有値を表わす．

まず，第 2 章では，大きい固有値に関する研究を行う．断面曲率が有界の場合には Lott (1999) によってその性質が調べられているため，我々は断面曲率の有界性が無い場合を調べる．その特別な場合として，Riemannian submersion の標準的な崩壊を扱った．$\pi : (M^m,g) \to (N^n,h)$ を連結，向き付けられた，閉 Riemann 多様体 (M^m,g) と (N^n,h) の間の Riemannian submersion とする．ここで，次元はそれぞれ $m \geq 2$ と $n \geq 1$ とし，fiber F の次元を $r = m-n$ と置く．この時，Riemannian submersion の標準的な崩壊 $(M,g_\varepsilon) \to (N^n,h)$ は，g_V と g_H をそれぞれ，g の垂直と水平成分としたとき，$g_\varepsilon := \varepsilon^2 g_V \oplus g_H \quad (\varepsilon > 0)$ で与えられる．この時，Forman (1995) の結果を用いると次が分かる．

定理 1. 上の Riemannian submersion の標準的な崩壊において，次は同値である：

(1) $\lambda_1^{(p)}(M,g_\varepsilon) \to \infty \ (\varepsilon \to 0)$;
(2) ある $k \geq 1$ に対して，$\lambda_k^{(p)}(M,g_\varepsilon) \to \infty \ (\varepsilon \to 0)$;
(3) $n < p < r$ かつ，$p-n \leq q \leq p$ であるすべての q に対して，$H^q(F;\mathbb{R}) = 0$.

第 3 章では，小さい固有値の研究の第一歩として，具体的な崩壊の例，すなわち，偶数次元球面の崩壊の場合について調べた．連結コンパクト Lie 群 G が閉 Riemann 多様体 (M,g) に効果的かつ等長的に作用しているとする．この時，Yamaguchi (1991) によって，M 上に計量の族 g_ε で，(M,g_ε) が $(M,g)/G$ へ曲率の下への有界性を保ちながら崩壊するものが構成出来る．我々の場合，$G := S^1$, $(M,g) := S^{2n}(1)$ と取る．$S^{2n}(1)$ への S^1-作用は，大球に平行な小球 S^{2n-1} に Hopf fibration としての作用を考える．この時，Yamaguchi の構成法から，我々は (S^{2n},g_ε) の $\mathbb{CP}^{n-1}$ の spherical suspension への崩壊を得る．(S^{2n},g_ε) の断面曲率は上に有界ではなく，また，極限空間は特異点を持つ空間で多様体ではないことに注意しよう．この崩壊に対して次の小さい固有値の存在が分かった．

定理 2. $2n$ 次元球面 S^{2n} $(n \geq 2)$ 上に，断面曲率 $K_{g_\varepsilon} \geq \kappa$ かつ直径 $\mathrm{diam}(S^{2n},g_\varepsilon) \leq d$ となる，ある計量の族 $\{g_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ が存在して，p が n かつ奇数の場合を除くすべての $1 \leq p \leq 2n-1$

に対して,

$$\lambda_1^{(0)}(S^{2n}, g_\varepsilon) \;\geq\; C, \quad \lambda_1^{(p)}(S^{2n}, g_\varepsilon) \to 0 \; (\varepsilon \to 0)$$

を満たす. ここに, C は ε に依らない正の定数である.

p が n かつ奇数の場合は, 固有値が 0 に収束するかどうかは不明である. さらに, この 4 元数版についても同様の結果を得た. すなわち, $G := S^3$ が $(M,g) := S^{4l}(1)$ に, 各小球 S^{4l-1} に Hopf S^3-fibration としての作用を考えると, (S^{4l}, g_ε) の $\mathbb{HP}^{l-1}$ の spherical suspension への崩壊を得る. この崩壊に対して小さい固有値の存在が言える.

また, 小さい固有値の存在は, 微分形式における Cheeger の不等式の類似の反例を与える. さらに, この結果は第 6 章で用いられる.

第 4 章では, 曲率の有界性が保存されないある崩壊における関数の固有値の振る舞いを研究した. 具体的には, 同じ次元 $m \geq 2$ の 2 つの多様体 (M_i, g_i), $i = 1, 2$, の連結和を取り, その一方 (M_2, g_2) を一様に 1 点に潰す崩壊である (崩壊の正確な記述は省略する). この連結和の崩壊を (M, g_ε) と書く. 曲率の下への有界性が保たれないと, 一般に極限空間の存在が言えず, 固有値の収束も成立しない. しかし, Chavel と Feldman のハンドルの崩壊や Anné の鉄亜鈴の崩壊のような特別な場合には, 固有値の収束が成立する. 我々は曲率の有界性を外すという観点の他に, 第 6 章で必要な固有値の貼り付け定理の確立という観点からもこの連結和の崩壊を研究した. Anné と Colbois による方法 (1987, 1995) を用いて次を示した.

定理 3. すべての $k = 0, 1, \ldots,$ に対して, 以下の固有値の収束が成立する.

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \lambda_k(M, g_\varepsilon) = \lambda_k(M_1, g_1).$$

なお, 微分形式の場合は, 固有値の上からの評価は得ることができた. これは, 第 6 章で証明する.

第 5, 6 章では, 閉 Riemann 多様体 (M, g) 上の固有値 $\lambda_1^{(p)}(M, g)$ と $\lambda_1^{(q)}(M, g)$ の差に, どのような幾何学的性質が反映しているか, というテーマで研究を行った. 最初に, 任意の閉多様体 M に $\lambda_1^{(p)}(M, g)$ と $\lambda_1^{(0)}(M, g)$ の差がある計量 g を許容するかどうかについて考察した. まず, $p = 1$ の場合を行った. この時, Δ と d の可換性から, 常に $\lambda_1^{(1)} \leq \lambda_1^{(0)}$ が成立する.

定理 4. M^m を任意の $m \geq 3$ 次元, 連結, 向き付けられた閉多様体とする. このとき, M 上に 2 種類の計量 g_i $(i = 1, 2)$ が存在して,

$$\lambda_1^{(1)}(M, g_1) = \lambda_1^{(0)}(M, g_1), \quad \lambda_1^{(1)}(M, g_2) < \lambda_1^{(0)}(M, g_2)$$

を満たす.

第 5 章では M の 1 次の Betti 数が消えているという仮定の下で証明しているが，第 6 章では，この仮定無しで証明できた．次に，一般の $p \geq 2$ の場合は，$\lambda_1^{(p)} > \lambda_1^{(0)}$ という関係式も成立しうることに注意しよう．

定理 5. M^m を任意の $m \geq 4$ 次元，連結，向き付けられた閉多様体とする．このとき，M 上に 3 種類の計量 g_i $(i = 1, 2, 3)$ が存在して，p が $\frac{m}{2}$ かつ奇数の時を除くすべての $2 \leq p \leq m-2$ に対して，

$$\begin{aligned}\lambda_1^{(p)}(M, g_1) &> \lambda_1^{(0)}(M, g_1), \quad \lambda_1^{(p)}(M, g_2) < \lambda_1^{(0)}(M, g_2), \\ &\lambda_1^{(p)}(M, g_3) = \lambda_1^{(0)}(M, g_3)\end{aligned}$$

を満たす．

最後に，Riemann 多様体に制限を課した際の，$\lambda_1^{(p)}(M, g)$ と $\lambda_1^{(0)}(M, g)$ の差について考察した．始めに，Ricci 曲率が正の Einstein 多様体の場合は，$\lambda_1^{(1)}(M, g) < \lambda_1^{(0)}(M, g)$ が成立すれば，恒等写像が調和写像の意味で弱安定となることが分かった．しかし，一般の Riemann 多様体ではもはやこれは成立しない．他方，(M, g) が 0 でない平行な p-形式を持つ場合には，$\lambda_1^{(p)}(M, g) \leq \lambda_1^{(0)}(M, g)$ の成立が分かった．