論文審査の結果の要旨

氏　名　　高橋　淳也

リーマン多様体の上で定義された関数の空間に、ラプラシアンとよばれる２階の楕円型微分作用素が作用する。ラプラシアンの固有値がリーマン多様体のどのような幾何的性質を反映するか、ということは微分幾何学の基本的な問題のひとつで、現在ではいろいろなことが明らかにされている。一方、関数空間のみならず、微分形式の空間に作用するラプラシアンも定義され、この固有値もリーマン多様体のさまざまな幾何的性質を反映していることが期待される。けれども、関数の場合と異なる難しさがあるため、その性質は現在まであまり知られていない。そこで論文提出者 高橋淳也 は微分形式に対するラプラシアンの固有値の研究を行った。

微分形式に対するラプラシアンの研究の困難さを示すひとつの事実として、次のことがある。コンパクトな距離空間全体にはグロモフ - ハウスドルフ距離が定まるが、この距離の定める位相に関して、直径が上から、リッチ曲率が下から一様におさえられた次元が一定のコンパクトリーマン多様体の族はプレコンパクトになることが知られている。したがって、多くの幾何学的な量は直径の上限とリッチ曲率の下限で評価される。関数に対するラプラシアンの固有値に対してはこのタイプの評価式が成立する。ところが、微分形式に対するラプラシアンの固有値に対してはこのタイプの評価式が成立しない。すなわち、直径を上から、リッチ曲率を下から制限しても、微分形式に対するラプラシアンの固有値はいくらでも大きくなり得るし、またいくらでも０に近づき得る。そこで、論文提出者はこれらの微分形式に対するラプラシアンの固有値の特徴的な現象の研究を行った。

リーマン沈めこみが与えられたとき、ファイバーの大きさを小さくしてゆく、というリーマン計量の族は、直径は上から、リッチ曲率は下から制限した範囲での変形である。これはリーマン多様体の列が、グロモフ - ハウスドルフ距離の定める位相に関して次元の低い空間に収束する、いわゆる崩壊という現象の典型的

な状況であるが、論文提出者は、この状況において、微分形式に対するラプラシアンの第k番目の固有値はいくらでも大きくなり得る、という現象が生じるための必要十分条件を、位相的な言葉で与えた。これはFormanによる議論のひとつの応用である。

一方、同じ状況のもとで、微分形式に対するラプラシアンの第k番目の固有値は0に収束する、という現象も生じうることが容易にわかる。論文提出者は、この現象をもっと一般の状況に拡張することを試みた。すなわち、リーマン多様体が特異点を持った空間に崩壊してゆくときの微分形式に対するラプラシアンの固有値の挙動を研究した。これに関しては一般論の建設にはいたらず、具体的な場合に関する解析を行うにとどまったが、論文提出者の結果は、0に収束する微分形式に対するラプラシアンの固有値と、リーマン多様体が崩壊してゆく特異点を持った空間のL^2コホモロジーとの関係を示唆しており、大きな理論に発展してゆくことが期待される。

さらに論文提出者は、以上の結果の応用として、n次元コンパクトリーマン多様体において、関数に対するラプラシアンの第1番目の固有値とp次微分形式に対するラプラシアンの第1番目の固有値の大小関係について考察した。pが2以上n－2以下のとき、いずれの固有値も他方の固有値より大きくなることがあり、そのような性質を持つリーマン計量を実際に構成した。この結果を示すために、リーマン多様体を張り合わせたときの固有値の挙動を調べたが、この議論は解析的にも興味深い。さらにある特別な場合に、上記の固有値の大小関係と、恒等写像の安定性との関係を調べた。この結果は、微分形式に対するラプラシアンの固有値とリーマン多様体の幾何的性質を結び付けたものとして大変興味深い。

以上より、論文提出者は、微分形式に対するラプラシアンの固有値という、詳しくその性質が知られていない未開拓な分野において、その特徴的な現象を抽出して記述し、その現象が生じる理由を調べた。まだ狭いクラス、あるいは特別な例にとどまっている部分も多いが、この研究は、将来大きく発展すると期待される理論の基礎となる、と考えられる。よって、論文提出者 高橋淳也 は、博士（数理科学）の学位を受けるにふさわしい充分な資格があると認める。