

論文の内容の要旨

A Nim game played on graphs (グラフ上の石取りゲーム)

福山真彦

先手、後手が交互に手を指し、勝敗を競う有名なゲームに Nim game (石取りゲーム、3山崩し) がある。Nim game の必勝法は、既に数学的に完全に解明されている。これまで Nim game を修正あるいは拡張したゲームが様々に考案され、研究されてきた。本論文の考案するゲーム *Nim on graphs* (グラフ上の Nim) も、Nim game の拡張であるが、ゲームがグラフ上で行われることに特徴があり、ゲームの展開 (先手と後手どちらが有利か) がグラフの構造に深く関わる。事実、ある構造をもつグラフ上の Nim の結果を導くのに、Menger の定理が重要な役割を果たし、別の構造をもつグラフ上の Nim の結果が、グラフの Matching の性質と関わるということが分かった。前者を本論文の Chapter 1 で、後者を Chapter 2 で論議する。

1 Nim on graphs のルール

G をグラフとし、今後、主に G 上で行われる Nim on graphs を考える。グラフ G の辺の集合、頂点の集合を、それぞれ記号 $E(G), V(G)$ で表すことにする。Nim on graphs のルールを説明する。グラフ G 上の重み付きグラフと駒を1つ用意し、駒を G の頂点に置く。これを記号 $G_{\omega, v}$ で表し、Nim on graphs の局面という。ここで、 $\omega : E(G) \rightarrow \bar{\mathbb{N}} = \mathbb{N} \cup \{0\}$ は G の辺に重みを与える写像、 v は駒を置く頂点である。最初に適当な局面が与えられ、先手、後手が交互に次の手 (一連の選択) を行うことによりゲームが進行する。

- (i) 駒の位置する頂点に接続する辺で正の重みをもつものを1つ選ぶ。
- (ii) 選んだ辺の重みをより小さな重み (非負整数) に置きかえる。
- (iii) 駒を、選んだ辺に沿ってもう一方の端点へ移動する。

ただし、自分の手番で、駒の位置する頂点に接続するどの辺の重みも0であるために、指し手を失った競技者を敗者とする。

注意 図1右のように何個かの小石を積んだいくつかの山を、通常の Nim game の局面という。通常の Nim game とは、与えられた適当な初期局面から始め、先手、後手が交互に次の手を打ち合い、小石が全て取り上げられた結果、指し手を失った競技者を敗者とするゲームである。

手 : 山を1つ選び、その山から少なくとも1つ以上の任意個数の小石を取り去る。

通常の Nim game の局面で、それぞれの山の小石の個数が k, l, m, \dots, n 個であるもの (図 1 右) は、図 1 左のようなグラフ上の Nim ゲームと同じである。

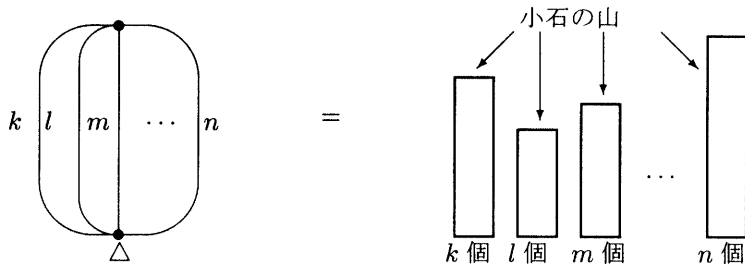


図 1. 通常の Nim ゲームに同値な Nim on graphs、 Δ は駒を表す。

先手 (後手) が後手 (先手) の任意の手に応じて適切な手を指せば、ゲームに必ず勝てる時、**先手必勝 (後手必勝)** という。また、このときのゲームの初期局面を **先手必勝局面 (後手必勝局面)** という。

本論文では、ゲーム Nim on graphs について、次の 2 つの問題を考える。

Problem A : 与えられた初期局面から始めたゲームが先手必勝か後手必勝かを決めよ。

Problem B : 与えられた局面の Grundy 数を求めよ。

ここで、局面 A の Grundy 数 $g(A)$ は、次の式で帰納的に定義される非負整数である。

$$g(A) = \min(\mathbb{N} \setminus \{g(A') \mid A' \text{ は } A \text{ の後続元}\}) \quad (1.1)$$

ただし、局面 A を局面 A' にするような手が、ルール上許されているとき、 A' を A の **後続元** という。これより、次の事実が示せる。

$$\text{局面 } A \text{ の Grundy 数} = 0 \iff \text{局面 } A \text{ から始めるゲームが後手必勝である。} \quad (1.2)$$

よって、Grundy 数が求めれば Problem A は解決したことになる。ところが、Grundy 数を定義から直接求める計算は膨大であり困難である。ここでいう Problem B とは、定義よりも簡略に局面の Grundy 数を求めるアルゴリズムを見つけることである。

通常の Nim game に関する Problem B は既に解決されており、図 1 右の局面、すなわち、 k, l, m, \dots, n 個の小石が積まれた山から成る局面の Grundy 数は次の公式で与えられることが知られている。

$$k \star l \star m \star \dots \star n \quad (1.3)$$

ここで、演算子 \star は **Nim 和** であり、次のように定義される。すなわち、2 進法表示された非負整数

$$m = m_N m_{N-1} \dots m_1 m_0 \text{ (2)} \quad \text{と} \quad n = n_N n_{N-1} \dots n_1 n_0 \text{ (2)} \quad \text{に対し、}$$

$$m \star n \triangleq l_N l_{N-1} \dots l_1 l_0 \text{ (2)} \quad \text{但し、} \quad l_j \equiv m_j + n_j \pmod{2} \quad (0 \leq j \leq N) \quad (1.4)$$

とする。Nim 和は結合則、 $(m \star n) \star l = m \star (n \star l)$ を満たす。

上述の通り、Problem B は Problem A を含み、より困難な問題である。しかし、ゲームの勝敗にだけ興味があるなら、Problem A が解ければ十分である。Problem B を解くこと、すなわち局面の Grundy 数を求めることは、ある種の複合ゲーム (複数のゲームから定義される大きなゲーム) を考える場合に意味を持つてくることが知られている。

2 Chapter 1 の主な結果

Nim on graphs の局面を表す グラフ G が 2 部グラフ で、ある固定点から 奇数距離、偶数距離の点をそれぞれ奇数位置の頂点、偶数位置の頂点 ということにし、全ての奇数位置の頂点の次数が 2 である と仮定する。(図 2 を参照せよ。)

Chapter 1 の主な目的は、この仮定の下で Problem A を解くことであり、実際、定理 1.2.5 がその解を与える。Chapter 1 のもう一つの目的は、多重辺をもつグラフ上の Nim に関する Problem B を、多重辺を持たないグラフ上の Nim に関する Problem B に帰着できることを示すことである。以後、定義、定理等の番号は本文に従う。

定義. G 上の重み付きグラフ G_w があるとし、 u, v を G の相異なる 2 頂点とする。辺の集合 E について、 u, v を結ぶ任意の道が E のある辺を通るとき、 E を u, v に関する**切断集合**といい、 E に含まれる辺の重みの合計を、切断集合 E の**値**という。また、 u, v に関する切断集合のうち値を最小とするものを、 u, v に関する**最小切断集合**という。

定義 1.2.1. 重み付きグラフ G_w のある奇数位置の頂点 u に接続する 2 辺の値が異なるとする。 G_w を奇数位置の頂点 u で**切り離す**とは、 G の頂点の集合 $V(G)$ に新たな頂点 \tilde{u} を加え、 u に接続する 2 辺のうち値の大きい方の端点 u を \tilde{u} に置き換え、新しいグラフ G_w^u を作ることにする。このとき、 u, \tilde{u} を G_w^u の**切り口**と呼び、特に \tilde{u} を G_w^u の**太い切り口**と呼ぶことにする。

定理 1.2.5. $G_{w,v}$ を、駒が偶数位置 v にある任意の局面とする。 $G_{w,v}$ が先手必勝局面であることの必要十分条件は、次の 3 条件を満たす奇数位置の頂点 u が存在することである。

- (i) u に接続する 2 辺の重みが異なる。小さい方の値を m とする。
- (ii) u で切り離れたグラフ G_w^u の 2 つの切り口に関する最小切断集合の値が m に等しい。
- (iii) G_w^u の 2 つの切り口に関する任意の最小切断集合を除いても、 v と太い切り口は連結されている。

定理の証明には、Menger の定理を用いる。

例 1.2.2. 図 2 の 2 つの局面それぞれについて、Problem A を解こう。左の局面については、定理 1.2.5 の 3 条件を満たす奇数位置の頂点 u が見つかる。一方、右の局面については、条件 (i)(ii) を満たす奇数位置の頂点が 1 つ見つかるが、これは条件 (iii) を満たさないことが分かる。よって、定理 1.2.5 より、左の局面は先手必勝局面、右の局面は後手必勝局面であると結論づけられる。

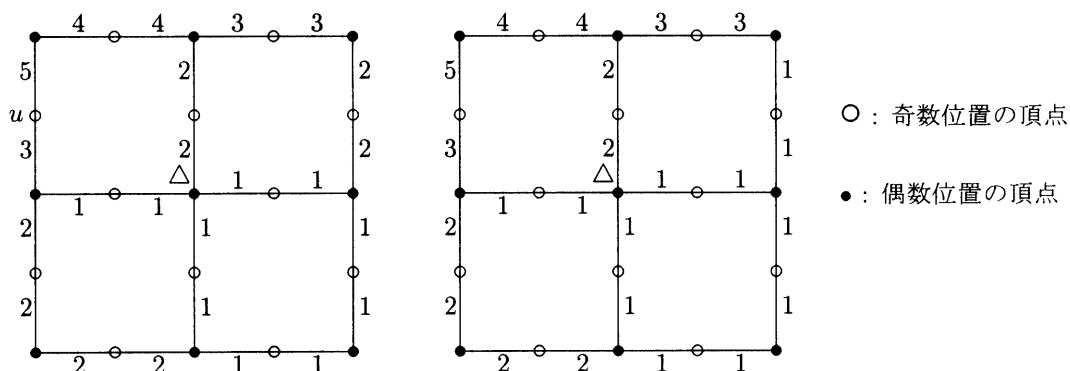


図 2. 定理 1.2.5 を適用できる局面の例

3 Chapter 2 の主な結果

Chapter 2 では、局面を表すグラフ G が多重辺及び輪（同じ点を結ぶ辺）をもたないとする。Section 2.2 と 2.3 では、さらに、交互閉路を持たない最大マッチングをもつ と仮定し、これを M で表し、固定する。Chapter 2 の主な目的は、この仮定の下で、Nim on graphs に関する Problem A と Problem B を調べることである。Section 2.2 が Problem A を、Section 2.3 が Problem B を扱う。これらの結果を利用することにより、Nim on trees に関する Problem B が完全に解決する。これを Section 2.4 で例を用いて説明する。Section 2.5 では、Nim on cycles に関する Problem B を完全に解決する。

3.1 Problem A に関する結果 (本文の Section 2.2)

定義 2.2.1. 仮定で与えられた最大マッチング M について、次の記号を導入する。

- $B = M$ の不飽和点を始点とする M -交互道に含まれる全ての辺から生成される辺部分グラフ
- $O = M$ の不飽和点から偶数長の M -交互道で結ばれ得る頂点の集合
- $O_1 = \{u \in O \mid M \text{ の不飽和点 } u_0 \text{ が存在し、} u_0 \text{ と } u \text{ を結ぶ } M\text{-交互道が唯 1 つ存在する。}\}$

$u \in O_1$ に対し、不飽和点 u_0 と u を結ぶ唯 1 つの M -交互道を L_u 、 M を L_u 上で交換して得られる最大マッチング、すなわち $(M - E(L_u)) \cup (E(L_u) - M)$ を、記号 M_u で表す。なお任意の不飽和点 u は、その不飽和点自身から長さ 0 の唯一の M -交互道で結ばれると考え、 O_1 に属するものとする。またこのとき、 $M_u = M$ であることが分かる。

次の定理は、最大マッチング M をもつグラフ上の Nim に関する Problem A をある程度解決する。

- 定理 2.2.6.** (i) $v \in O_1$ のとき、 $\mathcal{G}_{M,v}$ に属する局面は後手必勝局面である。特に、 v が M の不飽和点のとき、 $\mathcal{G}_{M,v}$ に属する局面は後手必勝局面である。
(ii) $v \notin O$ のとき、 $\mathcal{G}_{M,v}$ に属する局面は先手必勝局面である。

但し、 $E \subset E(G)$ 、 $v \in V(G)$ に対し、 $\mathcal{G}_{E,v} = \{G_{\omega,v} \mid \text{任意の } e \in E \text{ に対して、} \omega(e) > 0\}$ とする。

例 2.2.1. 図 3(a) のグラフ G について、太線で示された辺の集合を最大マッチング M とすれば、 M は交互閉路を含まない。このとき、図の破線部分にグラフ B が見つかる。また集合 O_1 、 $O \setminus O_1$ に属する頂点、 O に属さない頂点を、それぞれ記号 \circ 、 \square 、 \bullet で示している。図の全ての辺の重みを任意の正の整数とすると、定理 2.2.6 より、図 (a) において駒を \circ の頂点においた局面は後手必勝局面、駒を \bullet の頂点においた局面は先手必勝局面であることが分かる。

実際、駒を \bullet に置いた図 (a) の局面からゲームを始めれば、先手は次の作戦で必ず勝てる。

先手の作戦： 駒の位置する頂点に接続し M に属する辺を選び、その辺の重みを 0 とする。

一方、 $u \in O_1$ の頂点 (\circ の頂点)、例えば図 3(a) の中央の頂点とすれば、 M を u と u_0 を結ぶ唯 1 つの M -交互道 L_u 上で交換して得られる最大マッチング M_u は図 (b) の太線のようにになる。駒を u に置いた図 (b) の局面からゲームを始めれば、後手は次の作戦で必ず勝てる。

後手の作戦： 駒の位置する頂点に接続し M_u に属する辺を選び、その辺の重みを 0 とする。

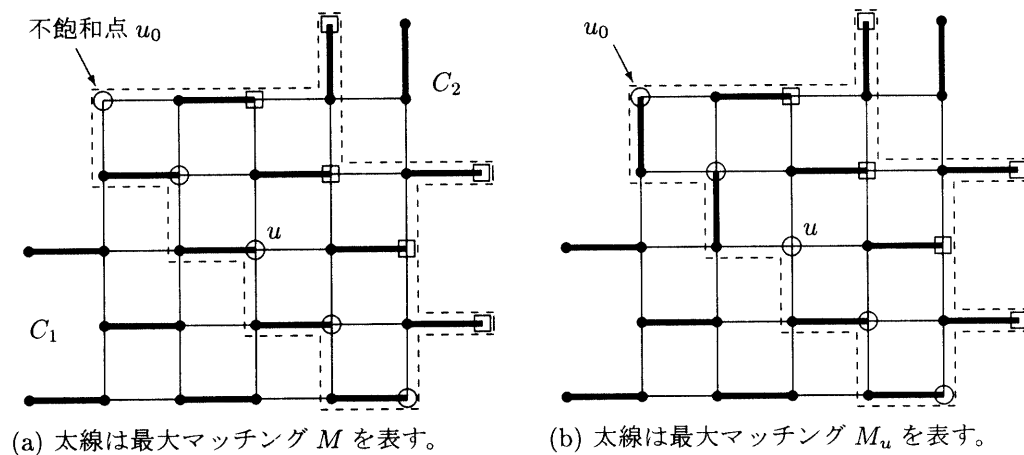


図 3 交互閉路を持たない最大マッチングをもつグラフ上の Nim

3.2 Problem B に関する結果 (本文の Section 2.3)

G から B に属する全ての辺を取り除いて得られる連結成分の 1 つを C 、 C の境界 $\Gamma(C)$ を次で定義する。

$$\Gamma(C) = \{u \in V(G) \mid \exists v \in V(C) \text{ s.t. 辺 } uv \text{ が } B \text{ に含まれる。}\} \quad (3.1)$$

次の定理は、最大マッチング M をもつグラフ上の Nim に関する Problem B の解決に重要な役割を果たす。

定理 2.3.5. $v \notin O$ とし、 G から B に含まれる全ての辺を取り除いて得られる連結成分のうち v を含むものを C とする。 $\Gamma(C) \subset O_1$ のとき、 $E_L = \bigcup_{u \in \Gamma(C)} E(L_u)$ とすれば、 $\forall G_{\omega, v} \in \mathcal{G}_{M \cup E_L, v}$ に対し、

$$g(G_{\omega, v}) = g(G_{\sigma(\omega), v}) + 1 \quad (3.2)$$

である。ここで、

$$\sigma(\omega(e)) = \begin{cases} 0 & \text{if } e \notin E(C) \\ \omega(e) - 1 & \text{if } e \in M \cap E(C) \\ \omega(e) & \text{otherwise} \end{cases} \quad (3.3)$$

とする。特に M が G の完全マッチングなら、 $B = \emptyset$ 、 $C = G$ より $\Gamma(C) = \emptyset$ であるから、 $E_L = \emptyset$ として、式 (3.2) が成立する。

例 2.3.1. 図 3(a) のグラフ G を考える。グラフ G からグラフ B に含まれる全ての辺 (すなわち図 3(a) の破線内の辺) を除くと、孤立点でない連結成分が、図の左下と右上に見つかる。これをそれぞれ C_1, C_2 とおくと、 $\Gamma(C_1)$ は図の“O”の頂点から成り、 $\Gamma(C_1) \subset O_1$ が分かる。よって、駒が C_1 内 (図 4(a) の破線内) にあれば、 $C = C_1$ として定理 2.3.5 が適用できる。図 4(a) の太線は、このときの辺の集合 $M \cup E_L$ に含まれる辺を表す。すなわち、図 4 において、図 4(a) の太線の辺の重みを正の整数とする任意の局面 (a) について、 $g(\text{局面 (a)}) = g(\text{局面 (b)}) + 1$ が分かる。但し、図 4(b) では重み 0 の辺を省略している。一方、図 3(b) より、 $\Gamma(C_2)$ は口の頂点を含み、 $\Gamma(C_2) \not\subset O_1$ であるから、駒が C_2 内にある場合、定理 2.3.5 を適用することができない。

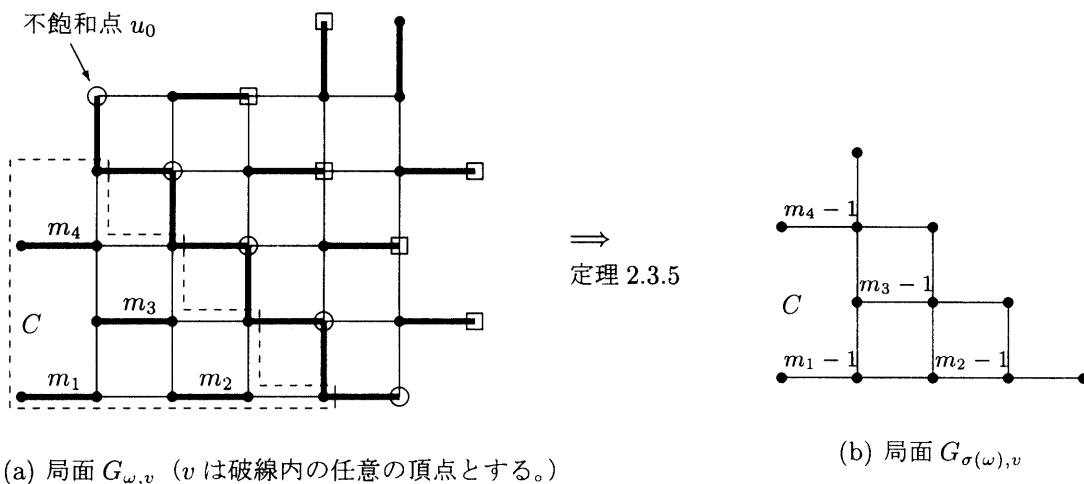


図 4 例 2.2.1 の局面 (a)(図 3) に定理 2.3.5 を適用する。

3.3 Nim on trees に関する Problem B の解決 (本文の Section 2.4)

Nim on trees の任意の局面の Grundy 数は、定理 2.3.5 の繰り返しの適用、及び、定理 2.2.6(i) の適用により、必ず計算することができる。すなわち、Nim on trees に関する Problem B は完全に解決された。

例 2.4.1. 図 5 の局面 (a) の Grundy 数を求めよう。局面 (a) のグラフに対し図の太線の最大マッチングを M とすれば、破線部分にグラフ B が見つかる。局面 (a) を $G_{\omega, v}$ とし、これに定理 2.3.5 を適用すれば、 $G_{\sigma(\omega), v}$

として、図 (b) の局面が得られ、 $g(\text{局面 (a)}) = g(\text{局面 (b)}) + 1$ を得る。局面 (b) のグラフから、ゲームに影響しない重み 0 の辺を除き、局面 (c) に再び定理 2.3.5 を適用すれば、 $g(\text{局面 (b)}) = g(\text{局面 (c)}) = g(\text{局面 (d)}) + 1$ を得る。重み 0 の辺を除けば局面 (d) は局面 (e) に他ならない。局面 (e) に対し図のような最大マッチングを M とすれば、駒 \triangle は不飽和点にあるから、定理 2.2.6(i) より $g(\text{局面 (e)}) = 0$ である。これらより、局面 (a) の Grundy 数は 2 であることが分かる。

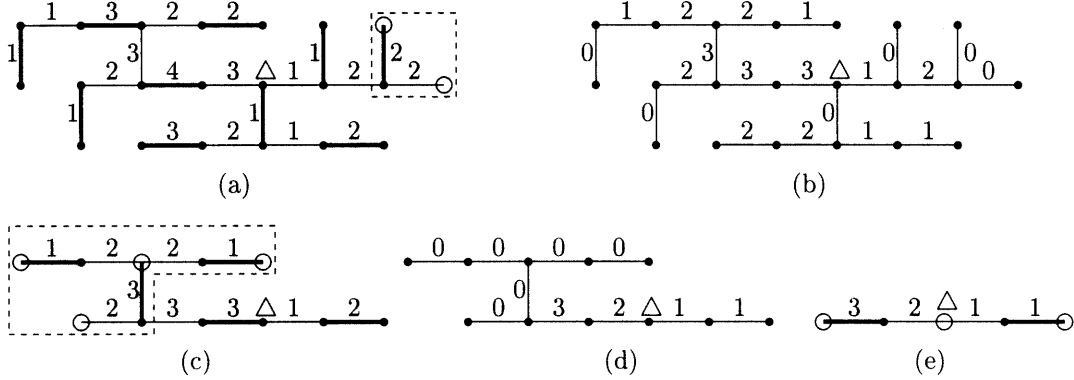


図 5 Nim on trees の例

3.4 Nim on cycles に関する Problem B の解決 (本文の Section 2.5)

次の命題により、Nim on odd cycles に関する Problem B が Nim on trees に関する Problem B に帰着される。

命題 2.5.1. $G_{\omega, v}$ を奇数長の閉路上の Nim の局面とする。任意の辺 e の重み $\omega(e)$ が正なら、

$$g(G_{\omega, v}) = g(G_{\omega-1, v}) + 1 \quad (3.4)$$

である。ここで、 $\omega - 1 : E(G) \rightarrow \bar{\mathbb{N}}$ は G の各辺に重みを与える写像で、次のように定義する。

$$\text{任意の辺 } e \in E(G) \text{ に対し、} (\omega - 1)(e) \triangleq \omega(e) - 1$$

次の命題を述べるため、非負整数 m, n, k の関数 $g_k(m, n)$ を次のように帰納的に定義し、導入する。

$$g_k(m, n) \triangleq \min(\bar{\mathbb{N}} \setminus \{m' \ddagger n, m \ddagger n', g_{k'}(m, n) \mid 0 \leq m' < m, 0 \leq n' < n, 0 \leq k' < k\}) \quad (3.5)$$

ここで、 \ddagger は (1.4) で定義された Nim 和である。

次の命題により、Nim on even cycles に関する Problem B が Nim on trees に関する Problem B に帰着される。

命題 2.5.2. G を偶数長の閉路、 G の 2 通りの完全マッチングを E_0, E_1 とすると、局面 $G_{\omega, v}$ の Grundy 数は次の公式で与えられる。

$$g(G_{\omega, v}) = g_k(m, n) \quad (3.6)$$

ここで、 $m = \min\{\omega(e) \mid e \in E_0\}$ 、 $n = \min\{\omega(e) \mid e \in E_1\}$ 、 $k = g(G_{\omega - m1_{E_0} - n1_{E_1}, v})$ であり、 $\omega - m1_{E_0} - n1_{E_1} : E(G) \rightarrow \bar{\mathbb{N}}$ は G の各辺に重みを与える写像で、次のように定義する。

$$(\omega - m1_{E_0} - n1_{E_1})(e) \triangleq \begin{cases} \omega(e) - m & \text{if } e \in E_0 \\ \omega(e) - n & \text{if } e \in E_1. \end{cases}$$

Nim on trees に関する Problem B は完全に解決されたのだから、これらの命題より、Nim on cycles に関する Problem B も完全に解決された。