

論文審査の結果の要旨

氏名 福山真彦

ニムゲーム (石取りゲームあるいは3山崩し) とは、碁石をいくつかの山に分けて積んでおき、2人のプレイヤーが交互に1つの山を選んでそこから好きなだけ石を取り除いていくとき、最後に取り除く石が無くなった方を負けとするゲームである。このゲームについて、最初の状態が与えられたときに先手必勝であるか後手必勝であるか、すなわち相手がどのような手を指してきてもうまく対処すれば必ず勝てるという方法がどちらのプレイヤーにあるのかということが問題になるが、それは既に20世紀初頭に解決されていた。知られている結果によれば、ある山の石の個数を1つ変えただけでもどちらのプレイヤーが必勝であるかは変化し、その意味で解答はデリケートであり単調性のない世界である。もちろん起こり得る場合すべてについてそれぞれ調べていけばよいのだが、それは膨大な作業になり現実的な解決を与えるとはとうてい言えない。そこで数学的には Grundy 数とよばれる量を帰納的に定義し、それを解析することによって解答を得ることが行われている。さらに、ニムゲームのルールを修正・拡張したゲームが色々考案され研究対象になっている。

論文提出者福山は、グラフ上のニムゲームという新しいゲームを導入しその先手必勝・後手必勝を調べ、さらにある場合に Grundy 数自身を求める研究を行った。これは組み合わせゲーム理論とグラフ理論を結びつける全く新しい分野の開拓である。福山の考案したゲームとは次のようなものである。まず有限グラフ G を考える。 G は頂点の集合と、頂点を結ぶ辺の集合からなる。各辺の上には石が積まれている。すなわち各辺に非負整数が対応づけられている。また、ある頂点に駒が置かれている。これが初期状態である。ゲームは、まず先手が駒のある頂点につながるいくつかの辺のうち1つの辺を選びその辺の上の石を任意個数取り去り同時にこの辺に沿って他方の頂点に駒を動かすという操作によって開始される。後手は同様に、先手が移動した駒のある頂点につながる1つの辺を選びその上にある石をいくつか取り去り辺に沿って駒を移動する。以下、先手・後手が交互にこの操作を繰り返していき、石を取り去ることができなくなった方が負けである。

提出された論文の第一章では、 G は2部グラフであって奇数位置の頂点からは常に辺が2本出ていると仮定して、駒が偶数位置の頂点にあるときに先手必勝あるいは後手必勝を判定するための必要十分条件を与えた。この定理を用いれば駒が奇数位置にある場合にも結果が得られるので、上記の G については問題は完全に解決されたと言ってよい。証明には、グラフ理論の基礎定理である Menger の定理、すなわち G 上の2つの頂点を分離するために必要な辺の最小個数を頂点を結ぶ道の個数で表示する定理を基本

的に用いている。Menger の定理のこのような応用は初めてであり、その意味でグラフ理論とゲーム理論をうまく結びつけた結果であると言える。

論文の第二章では、Grundy 数自身の解析を行っている。Grundy 数が 0 になることは後手必勝であることと同値であるので、単に先手必勝か後手必勝かを調べるよりも深い解析を進める必要がある。福山は、グラフ G は交互閉路をもたない最大マッチングをもつと仮定して、グラフの簡略化によるアルゴリズムを与えることにより問題の解決を図った。得られた定理は樹木 (tree) あるいはサイクル (cycle) に応用されている。これらはグラフ G の形にのみ依存して決まる結果であり、各辺の上に積まれた石の個数にはよらない。

ニム型のゲームの必勝法理論は 2 進法展開に依拠して本質的に単調でないふるまいを見せるが、福山はグラフ上で Menger の定理を用いて流量という物差しに立脚してそれを表現する手法を開発した。このような点に本質的に新しいアイデアを見出すことができる。

よって、論文提出者福山真彦は博士 (数理科学) の学位を受けるにふさわしい十分な資格があると認める。