論文内容の要旨

論文題目: Stable Stationary Patterns with Fine Structures Arising in Reaction-Diffusion Systems

(反応拡散系に現れる安定な微細構造パターン)

氏名: 大下 承民

本論文では，FitzHugh-Nagumo タイプの非線形性をもつ活性化因子・抑制化因子から成る反応拡散系を高次元の有界領域と全空間の両方で考察する．このシステムは２つの独立な変数 u と v をもつ．ここで，u は活性化因子の濃度を表わし，v は u の抑制化因子として働く．

本論文では，方程式

$$(1) \qquad \begin{cases} u_t = D_1 \Delta u + f(u) - \kappa v, \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \text{in } \Omega \times \mathbb{R}^+, \\ \tau v_t = D_2 \Delta v + u - \gamma v, \end{cases}$$

$$(2) \qquad \frac{\partial u}{\partial \nu} = \frac{\partial v}{\partial \nu} = 0, \quad \text{on } \partial\Omega \times \mathbb{R}^+$$

の，抑制化因子の作用によって生じる，複雑な構造をもつ定常パターンについて，３つのパラメータスケーリングで考察する．ここで，$\Omega \subset \mathbb{R}^n$ は滑らかな有界領域または全空間，$\partial/\partial\nu$ は境界上の外向き法線微分，$\Delta = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$ はラプラシアン，γ, τ は正の定数，D_1, D_2, κ は正のパラメーターである．f は，いわゆる双安定型の非線形項である．

方程式 (1) は，D_1/D_2 が小さいとき，次のような「相分離パターン」が現れることが多い．すなわち，領域内に，それぞれの領域で u がほぼ定数となっているような異なる２つの状態 (相) と，その２つの相を結ぶ薄い層 (遷移層) をもったパターンである．$D_1 \to 0$ の極限では，遷移層の幅は 0 に近づき，一般に「界面」と呼ばれる領域内部の不連続面が生じる．これについては，類似の方程式で多くの研究もある．しかしながら，いわゆる接合漸近展開法では，内部遷移層が，有限の面積をもつある滑らかな界面 (超曲面) に近づいていく場合しか考えられなかった．著者は，変分法を応用することで，振動の激しさが増していく複雑な構造をもった相分離パターンを見出すのに成功した．

FitzHugh-Nagumo 方程式は，最初，生理学における神経パルスの生成と伝導のモデルである Hodgkin-Huxley システムの簡略化された方程式として導入された．高次元での問題は，短期メモリーの神経ネットワークや心臓筋肉の神経細胞の問題に現れる．その後，拡張された FitzHugh-Nagumo 方程式が生物学のパターン形成の数理モデルとして提案された．例えば，抑制化因子の「側方抑制」がプランクトン分布のパターン形成に重要な役割を果たしていることが，示唆されている．本論文の活性化因子・抑制化因子のシステムは，Belousov-Zhabotinskii モデルとも呼ばれ，化学反応の分野でも研究されている．

本論文では，以下の３つの異なるパラメータスケーリングを考察した．

(i) $D_1 = O(\varepsilon^2)$, $\varepsilon \to 0$, および固定した κ, D_2.

(ii) $D_1 = O(\varepsilon^2), \kappa = O(\varepsilon)$, $\varepsilon \to 0$, および固定した D_2

(iii) $D_1 = O(\varepsilon^2), \kappa = O(\varepsilon)$, $\varepsilon \to 0$, および $D_2 \to \infty$

$f(u)$ が，典型的な非線形関数 $f(u) = u(1-u)(u-a)$, $0 < a \leq 1/2$ のとき，(i) では，$\int_0^1 f(v)\,dv > 0$，つまり $0 < a < 1/2$, (ii) および (iii) では，$\int_0^1 f(v)\,dv = 0$，つまり $a = 1/2$ を仮定する．また，$\liminf_{|u|\to\infty} \frac{|f(u)|}{|u|} > 0$ を満たすとする．f が，$f(u) = u(1-u)(u-a)$, $0 < a \leq 1/2$ のとき，$(u,v) = (0,0)$ はパラメーターの値にかかわらず，安定な定常解である．γ/κ が小さいとき, 問題 (1) は $(u,v) = (0,0)$ 以外に定数定常解をもたない (単安定) が，γ/κ が大きい場合, (1) は３つの定数定常解をもち，その内２つは安定で，１つは不安定である (双安定)．本論文は, (i) のスケーリングにおいては，双安定なケースを完全には排除しないでかつ単安定な場合を含むパラメータ範囲を仮定する．(スケーリング (ii) および (iii) は，必然的に双安定なケースに対応する.)

高次元では，(i) のスケーリングにおいて，滑らかな超曲面に近づく内部遷移層をもった解は，不安定であることが知られている．(1 次元では，状況が異なり，有限個の点に近づく内部遷移層をもつ安定な定常解が存在する.)

本論文第 I 部では，(i) のスケーリングで，高次元において非定数安定定常解を構成し，遷移層の厚さが 0 に近づく極限での解の生成する Young 測度を調べることにより，我々の解は，遷移層の厚さ ε より大きく，領域サイズよりはずっと小さい中間スケールで振動し，その全変動は，無限大に発散することを示した．特に，我々の解の界面はどんな滑らかな $(n-1)$ 次元の曲面にも収束しない．さらに，解 $u = u_\varepsilon$ のパターンは 1 点凝縮を起こすわけでもない.

本論文第 II 部では，(ii) および (iii) のスケーリングで，相分離パターンへ収束する安定な定常解を構成し，内部遷移層の位置を決定する幾何学的変分問題を考察した.

定理 (本論文第 I 部 Theorem 1.1, 2.1 および第 II 部 Theorem A)

Ω は有界とする．(i)–(iii) のそれぞれの極限において，問題 (1)–(2) は非定数定常解 $(u_\varepsilon, v_\varepsilon)$ をもち，もしさらに, $\tau\kappa < \gamma^2$ が成り立てば，安定である．また，以下が成り立つ.

(1). (i) のスケーリングで，u_ε は L^1 で収束部分列をもたない．特に，全変動は $\varepsilon \to 0$ のとき発散する. (典型的には，全変動は，界面の面積の定数倍で近似できる.) また，u_ε は，$\varepsilon \to 0$ のとき，Young 測度 $\mu = (\mu_x)_{x\in\Omega}$ を生成する．ここで，ある定数 $\alpha \neq \beta$ と $\theta \in (0,1)$ に対して，ほとんどいたるところ,

$$\mu_x = \theta\delta_\alpha + (1-\theta)\delta_\beta$$

が成立する.

(2). (ii) および (iii) のスケーリングで，u_ε は，有限の全変動 (界面面積) をもつ相分離パターンへ L^1–収束する部分列をもつ.

また，(ii) のスケーリングにおいて，$\sqrt{D_1}/\kappa$ を小さくすることにより，極限として現れるパターンの全変動は，いくらでも大きくとれることも示した．他方 (iii) のスケーリングでは，$\sqrt{D_1}/\kappa$ を小さくとったとしても，極限問題のパターンの全変動は有界であって，いわゆる「等周問題」の解に近づく．すなわち，体積一定での境界の面積を最小にする問題である．(**本論文第 II 部 Theorem B**.) (iii) のスケーリングにおいては,

v の効果は，u の分離した 2 相の体積比をある一定値に近づけるものとなり，激しく振動する解は，得られない．ここで，$\sqrt{D_1}/\kappa$ を ε とは独立なパラメータとして導入したのが，著者のアイディアである．これによって，(i) とは異なり，界面パターンの生成と極限問題におけるパターンの複雑性を分離することができた．

「等周問題」の解への収束は，旧来，勾配系である van der Waals-Cahn-Hilliard 理論や，保存量をもった Allen-Cahn 方程式において応用されていたが，本論文のフルシステムにおけるパターン形成では，考えられたことがなかった．

また，多くの非線形拡散方程式においては，ある特異極限下で現れる不連続面の運動が，平均曲率流のような界面方程式の解で近似できることが知られている．(ii) および (iii) のスケーリングでは，曲面の曲率という局所的な効果と，v に起因する非局所的な効果が同じオーダーで現れるため，保存量を持たないけれども，通常の平均曲率流とは異なり，非自明な平衡状態が存在し得る．本論文第 II 部において導いた極限問題の解は，その界面方程式の平衡状態に対応している．

最後に，$\Omega = \mathbb{R}$ でかつ $f(u) = u(1-u)(u-a)$ の場合には，フロントをもった進行波や，局在化した非定数定常解の存在など，多くのことが研究されている．また，Ermentrout-Hastings-Troy らは，$\Omega = \mathbb{R}$, $f(u) = u(1-u)(u-a)$，$0 < a < 1/2$ の場合に，空間的に周期的な定常解を構成した．本論文の周期解の結果 (**本論文第 I 部 Theorem 1.2, Corollary 1.1**) は，非線形関数 $f(u)$ とパラメータ範囲について，Ermentrout らの結果の拡張になっている．