論文審査の結果の要旨

氏 名 大下 承民

論文提出者 大下 承民は，FitzHugh-Nagumo タイプの非線形性をもつ活性化因子・抑制化因子からなる反応拡散系を考察し，微細な秩序構造をもつ空間的なパターンの存在と安定性を示した．

論文提出者が考察したのは，以下の反応拡散系である．

$$
\begin{cases}
u_t = D_1 \Delta u + f(u) - \kappa v, & \\
 & \text{in } \Omega \times \mathbb{R}^+, \\
\tau v_t = D_2 \Delta v + u - \gamma v, & \\
 & \\
\dfrac{\partial u}{\partial \nu} = \dfrac{\partial v}{\partial \nu} = 0, & \text{on } \partial\Omega \times \mathbb{R}^+.
\end{cases}
\tag{1}
$$

ここで，$\Omega \subset \mathbb{R}^K$ は滑らかな有界領域または全空間，γ, τ は正の定数，D_1, D_2, κ は正のパラメーターである．f は，いわゆる双安定型の非線形項である．また $\partial/\partial\nu$ は通例のように境界上の外向き法線微分，$\Delta = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$ はラプラシアンである．

「反応拡散系」と呼ばれる非線形拡散方程式のクラスは，物理学や数理生物学をはじめ，自然科学の多くの分野における重要な数学モデルとして盛んに研究されてきた．この方程式系においては，ある条件下で解が複雑多様な空間的パターンを呈することが知られている．実際，上の問題 (1) は，D_1/D_2 が小さいとき，しばしば次のような「相分離パターン」が現れる．すなわち，領域内に，それぞれの領域で u がほぼ定数となっているような異なる２つの状態 (相) と，その２つの相を結ぶ薄い層 (遷移層) をもったパターンである．$D_1 \to 0$ の極限では，遷移層の幅は 0 に近づき，一般に「界面」と呼ばれる領域内部の不連続面が生じる．

それらのパターンの構造やメカニズムの研究に，これまで分岐理論や特異摂動法，力学系の不変多様体の理論などの数学的手法が適用され，パターン形成に関する数学的理解は飛躍的に進歩してきた．しかしながら，いわゆる接合漸近展開法を用いたアプローチでは，内部遷移層が $D_1 \to 0$ の極限で何らかの滑らかな界面 (超曲面) に収束する場合しか扱えない．このため，現実の世界でしばしば観察される，より複

雑な微細構造パターンの数学的研究はほとんど進んでいなかった．論文提出者は，FitzHugh-Nagumo 型の反応拡散系に現れる微細構造を変分原理を用いて数学的にとらえることに成功し，微細構造パターンの安定性も同時に示した．

論文提出者が考察したシステムは，数理生物学や高分子化学などにおいて盛んに研究されている重要な方程式である．実際，FitzHugh-Nagumo 方程式は，最初，生理学における神経パルスの生成と伝導のモデルである Hodgkin-Huxley システムの簡略化された方程式として導入された．その後，化学反応における Belousov-Zhabotinskii モデルや生物学のパターン形成の数理モデルとしておなじみのものとなっている．

論文提出者は，以下の３つの異なるパラメータスケーリングを考察した．

(i) $D_1 = O(\varepsilon^2)$, $\varepsilon \to 0$, および固定した κ, D_2.
(ii) $D_1 = O(\varepsilon^2), \kappa = O(\varepsilon)$, $\varepsilon \to 0$, および固定した D_2.
(iii) $D_1 = O(\varepsilon^2), \kappa = O(\varepsilon)$, $\varepsilon \to 0$, および $D_2 \to \infty$.

高次元では，(i) のスケーリングにおいて，滑らかな超曲面に近づく内部遷移層をもった解は，不安定であることが知られていた．論文提出者は，(i) のスケーリングで，高次元において非定数安定定常解を構成し，その解の生成する Young 測度を調べることにより，そこで得られた解は，遷移層の厚さ ε より大きく，領域サイズよりはずっと小さい中間スケールで振動し，その全変動は，$\varepsilon \to 0$ のとき無限大に発散することを示した．このような現象が起こることは，既知の不安定性の結果からある程度予測されていたことであるが，実際に数学的解明がなされたのはこれが最初である..

また，論文提出者は，(ii) および (iii) のスケーリングの下で，滑らかな界面をもつ相分離パターンに収束する安定な定常解を構成するとともに，その内部遷移層の位置を決定する幾何学的変分問題を考察した．その結果を用いて，(ii) のスケーリングにおいては，$\sqrt{D_1}/\kappa$ を小さくすることにより，極限として現れるパターンの全変動は，いくらでも大きくできることも示した．

他方，(iii) のスケーリングでは，$\sqrt{D_1}/\kappa$ を小さくとったとしても解のパターンの全変動は有界にとどまり，極限でいわゆる「等周問題」の解に近づく．すなわち，体積一定という制約条件下での境界の面積を

最小にする問題である．つまり，(iii) のスケーリングにおいては，v の効果は，u の分離した 2 相の体積比をある一定値に近づけるものとなり，激しく振動する解は得られない．

このように，スケーリングの取り方で極限の状況が大きく変わることが示された．これらの結果を得るにあたって，論文提出者は，$\sqrt{D_1}/\kappa$ を ε とは独立なパラメータとして導入し，この 2 つの組み合わせによって，「界面パターンの生成」と極限問題における「パターンの複雑性」を分離してコントロールすることに成功した．

「等周問題」の解への収束は，従来は，勾配系である van der Waals-Cahn-Hilliard 理論や，保存量をもった Allen-Cahn 方程式において応用されていたが，FitzHugh-Nagumo 型のフルシステムのような非勾配系では考えられたことがなかった．この点においても，論文提出者のアプローチは斬新である．

これまでこの方面の研究の多くは，比較的粗いスケールのパターンの研究が中心であり，実験や数値シミュレーションで確認されているようなはるかに微細な秩序構造をもったパターンを数学的にどのように特徴付けたらよいかという問題が長らく懸案であった．論文提出者の仕事は，こうした微細構造パターンに関する研究において新しい展開を与えたものとして高く評価できる．

以上の諸点を考慮した結果，論文提出者 大下 承民 は，博士 (数理科学) の学位を受けるにふさわしい十分な資格があると認める．