論文の内容の要旨

論文題目： On Scholl elements (Scholl 元について)

氏名：周健

この論文は Kuga-Sato 多様体の K-群にある元を対象にして作成しました。

Kuga-Sato 多様体 $E^k_{Np^n}$ を与えたとき、Eisenstein 符号を使って $K_{k+2}(E^k_N)$ に元 (多数あり) を作ることが Beilinson-Deninger-Scholl の仕事の一部であり、彼達はそれらの元を複素 regulator 写像を通して、 $E^k_{Np^n}$ のある L-関数の $s=0$ での値と結び付いた。その元の p-進的性質を調べるのは、この文章の主旨である。

p-進的性質を調べる為に、ノルム写像との協調さが欠かせないものである。多数の元の中に協調さのある元を探すのを Scholl によって始められた。Scholl は開集合 $\tilde{U}^k_{Np^n}$ の K_{k+2} にノルム写像と協調する元 ${}_{c,c'}\tilde{z}^k_{Np^n}$ を発見した。この論文は Scholl の仕事を基にし、より精密的な方向へと推進しようとした。まず、全 $E^k_{Np^n}$ の $\mathbb{Q}\otimes K_{k+2}$-群に Scholl 元に似た元 ${}_{c,c'}z^k_{Np^n}$ を作り上げ、そのノルム写像との協調さを調べることにした。その次、 p-進 regulator 写像

$$\mathbb{Q}\otimes K_{k+2}(E^k_N\otimes\mathbb{Q}(\zeta_{p^n}))\longrightarrow H^{k+2}_{\mathrm{cont}}(E^k_N\otimes\mathbb{Q}(\zeta_{p^n}),\mathbb{Q}_p(k+2))$$

と Hochschild-Serre spectral sequence

$$H^i(\mathbb{Q}(\zeta_{p^n}),H^j_{\acute{e}t}(E^k_N\otimes\bar{\mathbb{Q}},\mathbb{Q}_p(k+2)))\Longrightarrow H^{i+j}_{\mathrm{cont}}(E^k_N\otimes\mathbb{Q}(\zeta_{p^n}),\mathbb{Q}_p(k+2))$$

そして weight filtration の分析によって、以下の写像

$$\nu:\mathbb{Q}\otimes K_{k+2}(E^k_N\otimes\mathbb{Q}(\zeta_{p^n}))\longrightarrow H^1(\mathbb{Q}(\zeta_{p^n}),H^{k+1}_{\acute{e}t}(E^k_N\otimes\bar{\mathbb{Q}},\mathbb{Q}_p(k+2))$$

を定義することができ、 Scholl 元の p-進的性質を探るドアを開けた。初めて探求するのは Scholl 元と Eisenstein series との関係である。その背景として、 L-関数の p-進理論という奥深い分野がある。まず、 $E^k_{Np^n}$ の L-関数の $s=0$ (或

は $s=k+2$ ）での値と関係する K_{k+2}-群の元（ Scholl 元）が、写像 ν を通して、$H^1(\mathbb{Q}(\zeta_{p^n}), H^{k+1}_{\acute{e}t}(E^k_N \otimes \bar{\mathbb{Q}}, \mathbb{Q}_p(k+2))$ の元 ${}_{c,c'}z^k_{N,n,p}$ （ p-進 zeta 元という）を定め、ノルム協調性があるので

$$\varprojlim H^1(\mathbb{Q}(\zeta_{p^n}), H^{k+1}_{\acute{e}t}(E^k_N \otimes \bar{\mathbb{Q}}, \mathbb{Q}_p(k+2))$$

に属す。一方、同じく $E^k_{Np^n}$ の L-関数の $s=r$ $(1 \leq r \leq k+1)$ での値を決めたのは Eisenstein series ${}_{c,c'}z^{k,r}_{N,n}$ である (周期写像によって)。また、その Eisenstein series は $H^1(\mathbb{Q}(\zeta_{p^n}), H^{k+1}_{\acute{e}t}(E^k_N \otimes \bar{\mathbb{Q}}, \mathbb{Q}_p(r)))$ のある元 ${}_{c,c'}z^{k,r}_{N,n,p}$ (加藤和也氏が定義) の dual exponential map 下での像であることもわかった。$H^1(\mathbb{Q}(\zeta_{p^n}), H^{k+1}_{\acute{e}t}(E^k_N \otimes \bar{\mathbb{Q}}, \mathbb{Q}_p(r)))$ にある元 $({}_{c,c'}z^{k,r}_{N,n,p})$ と $H^1(\mathbb{Q}(\zeta_{p^n}), H^{k+1}_{\acute{e}t}(E^k_N \otimes \bar{\mathbb{Q}}, \mathbb{Q}_p(k+2)))$ にある元 $({}_{c,c'}z^k_{N,n,p})$ と（ Tate twist によって）結び付いたのが一般の予想である。つまり、複素 L-関数の値から違った道によって p-進世界に入ると、また合流する。

加藤氏の一般化した explicit reciprocity law をこの場合での適用性を検証した。また、それを用いた計算の結果をまとめた。

定理：$\xi \in \mathbb{Z}_p(1)$ **を** Z_p**-basis とすると、**$({}_{c,c'}z^k_{N,n,p})_{n>0} \otimes \xi^{-1}$ **と** $({}_{c,c'}z^{k,k+1}_{N,n,p})_{n>0}$ **は非零定数** $C_{\xi,c,c'} \in \mathbb{Q}_p$ **を除いて dual exponential map 下の像は等しいである。**

本文では、定数 $C_{\xi,c,c'}$ の形も定めた。

また、次のことが予想される。

予想：

$$({}_{c,c'}z^k_{N,n,p})_{n>0} \otimes \xi^{-1} = C_{\xi,c,c'} \cdot ({}_{c,c'}z^{k,k+1}_{N,n,p})_{n>0}$$

加藤先生が筆者にこの問題を紹介し、その後も、暖かく見守ってくれたことに深く感謝致します。

参考文献

[Bei] Beilinson, A.: *Higher regulators of modular curves.* Applications of algebraic K-theory to algebraic geometry and number theory, Comtemporary Mathematics **5** (1986) p. 1-34

[Del1] Deligne, P.: *Theorie de Hodge, II.* Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. **40** (1971) p. 5-57

[Del2] Deligne, P.: *Theorie de Hodge, III.* Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. **44** (1974) p. 5-77

[Den] Deninger, C.: *Higher regulators and Hecke L-series of imaginary quadratic field, I.* Invent. Math. **96** (1989) p. 1-69

[Ka1] Kato, K.: *p-adic Hodge theory and values of zeta functions of modular forms.* preprint.

[Ka2] Kato, K.: *Lectures on the approach to Iwasawa theory for Hasse-Weil L-functions via B_{dR}*. Lecture Notes in Math. **1553**, Springer (1993) p. 50-163.

[Ka3] Kato, K.: *Generalized explicit reciprocity laws*. Advanced studies in contemporary Math. **1** (1999) p. 57-126.

[Sch] Scholl, A.: *An introduction to Kato's Euler systems*. in Galois representations in arithmetic algebraic geometry, London Math. Soc. Lect. Notes **254**, Cambridge Univ. Press (1998) p. 379-460.