論文の内容の要旨

論文題目

Siegel-Whittaker functions on $SO_o(2,q)$ for class one principal series representations

($SO_o(2,q)$ 上のクラス 1 主系列表現に対する
ジーゲル－ホイッタッカー関数について)

氏 名　　　　　　　石 井　卓

この論文では，IV型対称領域上の保型形式のフーリエ展開に関連する，ある一般化された球関数について考察する．よく知られているように保型形式に付随する保型 L 関数を構成する際に，フーリエ展開は重要な役割を果たす．しかし正則でない保型形式に対しては，既存の研究ではアルキメデス素点での理論が十分に構築されていないため，出発点であるフーリエ展開でさえ十分な深さで知られていない．そこでこの論文では $SO_o(2,q)$ $(q \geq 3)$ という実半単純リー群上のクラス 1 主系列表現のある誘導表現における実現とその中の関数について詳しく調べる．

我々の問題を表現論の言葉を用いて定式化する前に，この論文で扱う波動形式という保型形式のフーリエ展開に関する問題点を述べておこう．G を実半単純リー群，K を G のあるコンパクト部分群とする．Riemann 対称対 (G,K) とカスプを持つ G の数論的部分群 Γ に対して，G 上の C^∞ 級関数 f が波動形式であるとは，以下を満たすことである．(1) f は左 Γ 不変かつ右 K 不変，(2) f は対称領域 G/K の不変微分作用素の同時固有関数，(3) f はある増大条件を満たす．ここで条件 (1)，(2) から f は右移動で G のクラス 1 主系列表現を生成していることに注意しておく．

$G = SO_o(2,q)$ とする．このとき対称領域 G/K はエルミート型で，IV型対称領域と呼ばれるものである．P_s を Γ のある 0 次元カスプに対応する G の Siegel 放物部分群とし，そのベキ単根基を N_s(アーベル群になる)，Levi 部分群を L_s と書き，波動形式 f の P_s に沿ったフーリエ展開を考えよう．N_s のユニタリ指標 ξ を 1 つ取って固定し，

$$A_\xi(g) = \int_{N_s \cap \Gamma \backslash N_s} f(ng)\xi^{-1}(n)dn$$

(ξ に対するフーリエ係数) とおくと，

$$f(ng) = \sum_{\xi \in (N_s \cap \Gamma \backslash N_s)^\wedge} A_\xi(g)\,\xi(n),$$

というフーリエ展開を得る．すると波動形式の条件 (2) からフーリエ係数 $A_\xi(g)$ は (q 変数の) 偏微分方程式系を満たすことがわかるが，その解空間は無限次元になってしまう．そこで $SO(\xi)$ を ξ の L_s における固定部分群の単位元の連結成分とし，$A_\xi(g)$ を $SO(\xi)$ でさらに展開することを考える．$SO(\xi)$ は ξ が「定値」な指標の場合には $SO(q-1)$ と，「不定値」な指標の場合には $SO_o(q-1)$ と同型になる．この論文では ξ が「定値」な場合のみを扱う．このとき $SO(\xi)$ の有限次元既約表現 (χ, V_χ) を固定し，

$$A_{\xi,\chi}(g) = \int_{SO(\xi)} A_\xi(sg)\cdot\chi(s)ds$$

とおくと，A_ξ のフーリエ展開

$$A_\xi(sg) = \sum_{\chi \in SO(\xi)^\wedge} \langle A_{\xi,\chi}(g), \chi^*(s)\rangle = \sum_{\chi\in SO(\xi)^\wedge}\sum_{i=1}^{\dim\chi}\langle A_{\xi,\chi,i}(g), \chi_i^*(s)\rangle,$$

を得る．ここで χ^* は χ の反傾表現，$\langle\ ,\ \rangle$ は $V_\chi \times V_{\chi^*}$ の標準内積である．するとこのフーリエ係数 $A_{\xi,\chi,i}(g)$ は V_χ に値をとる 2 次元の空間 $SO(\xi)\backslash L_s/L_s\cap K$ 上の関数と見なせ，先の偏微分方程式系をこの空間に制限すると解空間は有限次元となる．さらに適当な増大度条件を課すと解はスカラー倍を除いて一意に定まることがわかり (重複度 1 定理)，その積分表示も得られる (定理 7.1)．これにより ξ が「定値」である項に対するフーリエ展開の明示形がわかる．一方 ξ が「不定値」である項については $SO(\xi)$ がコンパクト群でないことに起因する困難が生じ，$G = Sp(2,\mathbf{R})$ $(q=3)$ の場合でさえも，偏微分方程式系の解空間の十分な解析ができていない．

では我々の問題を表現論的に定式化しよう．G を実半単純リー群とし，そのリー環を $\mathfrak{g}$ と書き，G の極大コンパクト部分群 K を固定する．さらに G の閉部分群 R およびその平滑な既約表現 η を取り，$C^\infty\mathrm{Ind}_R^G(\eta)$ を η を平滑に誘導して得られる G の表現とする．G の既約認容表現 π に対して，$(\mathfrak{g}, K)$ 加群の間の絡作用素の空間

$$\mathscr{I}(\pi,\eta) = \mathrm{Hom}_{(\mathfrak{g},K)}(\pi, C^\infty\mathrm{Ind}_R^G(\eta))$$

を考える．$\mathscr{I}(\pi,\eta)$ の元 Φ に対して，$\mathrm{Im}(\Phi)$ という π の $C^\infty\mathrm{Ind}_R^G(\eta)$ における実現を π に対する一般化された球関数と呼ぶ．このとき次のような問題を考える．

(1) $\mathscr{I}(\pi,\eta)$ の次元を決定せよ．さらにある増大度条件を課したとき 1 次元になるかどうか調べよ (重複度 1 定理)．

(2) 一般化された球関数の (G 上の関数としての) 明示公式を求めよ．

適当な R と η に対して，この問題は保型形式の局所 (アルキメデス素点) 理論と深く関係してくる．例えば R が G の極大ベキ単部分群で η がその既約ユニタリ指標である場合，この球関数は Whittaker 関数と言われ多くの研究がなされている．

再び $G = SO_o(2,q)$ の場合に戻ってこの論文における問題を述べよう．$P_s = L_s \ltimes N_s$，ξ を N_s のユニタリ指標として，まず絡作用素の空間 $\mathrm{Hom}_{(\mathfrak{g},K)}(\pi, C^\infty\mathrm{Ind}_{N_s}^G(\xi))$ を考える．π が G の正則離散系列表現の場合には，この絡作用素の空間は有限次元になり，さらに球関数は指数関数を用いて表される．これから良く知られた正則保型形式のフー

リエ展開を得る．しかし π が（クラス1）主系列表現の場合にはこの空間は無限次元になる．そこで R を N_s と $SO(\xi)$ の半直積とし，さらに $SO(\xi)$ の既約ユニタリ表現 χ を1つ固定して $\eta = \chi \cdot \xi$ とおく．このとき先に述べた一般化された球関数を我々は Siegel-Whittaker 関数と呼ぶことにする．

$G = Sp(2, \mathbf{R})$ で ξ が「定値」のとき，丹羽伸二氏はクラス1主系列表現 π に対して，絡作用素の空間の重複度1定理および Siegel-Whittaker 関数の明示公式を得ている．本論文の目的はこの結果を $SO_o(2, q)$ の場合に拡張することである．$\mathfrak{sp}(2, \mathbf{R}) \cong \mathfrak{so}(2, 3)$，$\mathfrak{su}(2, 2) \cong \mathfrak{so}(2, 4)$ であることに注意しておく．また離散系列表現に対する Siegel-Whittaker 関数については，$G = Sp(2, \mathbf{R})$ のときは宮崎琢也氏，$G = SU(2, 2)$ のときは権寧魯氏の研究がある．一方で筆者は以前の研究で，$Sp(2, \mathbf{R})$ のクラス1に限らない主系列表現に対して，重複度なし定理および球関数のある特異因子に沿った「境界値」の明示公式を既に得ている．

Siegel-Whittaker 関数に限らず，クラス1主系列表現に対する一般化された球関数は G/K 上の不変微分作用素の同時固有関数として特徴付けられる．対称空間の不変微分作用素環の生成元を求める方法については，最近進展があるようだがここでは古典的な方法で計算した（命題3.1）．既に見たように Siegel-Whittaker 関数は $SO(\xi)$ の既約表現の表現空間上に値をとる関数である．従って，一般の q の場合には $q = 3$ の場合とは違ってベクトル値関数になり問題が複雑になる．我々は ξ が「定値」のとき $SO(\xi) \cong SO(q-1)$ の既約表現を Gel'fand-Zetlin 基底を用いて実現し，先に求めた不変微分作用素と合わせて Siegel-Whittaker 関数の満たす偏微分方程式系を与えた（定理6.1）．実はここで π がクラス1であるために Siegel-Whittaker 関数の右 K-不変性が効いて，Siegel-Whittaker 関数は Gel'fand-Zetlin 基底を用いて表したときに1つの成分しか残らない，つまり偏微分方程式系は1つの関数に対する方程式系になることがわかる．さらにある簡単な関数をかけることによって，我々の問題は $q = 3$ の場合にほぼ帰着できる．しかし，q が偶数の場合には丹羽氏の明示公式が適用できないのでここでは独立の方法をとり以下を得た．

主定理（定理7.1）π を $SO_o(2, q)$ の既約クラス1主系列表現とする．N_s の「標準的」な「定値」ユニタリ指標 ξ_0 と，$SO(\xi_0) \cong SO(q-1)$ の最高ウエイト $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_{[(q-1)/2]})$ の有限次元既約表現 χ_λ に対して $\eta = \chi_\lambda \cdot \xi_0$ とする．このとき，

(1) λ が $(\lambda_1, 0, \dots, 0)$ の形でないときは

$$\dim_{\mathbf{C}} \mathrm{Hom}_{(\mathfrak{g}, K)}(\pi, C^\infty \mathrm{Ind}_R^G(\eta)) = 0.$$

(2) $\lambda = (\lambda_1, 0, \dots, 0)$ のときは

$$\dim_{\mathbf{C}} \mathrm{Hom}_{(\mathfrak{g}, K)}(\pi, C^\infty \mathrm{Ind}_R^G(\eta)^{\mathrm{rap}}) = 1,$$

ここで，$C^\infty \mathrm{Ind}_R^G(\eta)^{\mathrm{rap}}$ は $C^\infty \mathrm{Ind}_R^G(\eta)$ の中の急減少関数全体のなす $(\mathfrak{g}, K)$ 部分加群を意味する．さらにこの絡作用素の元に対する Siegel-Whittaker 関数はある Euler 型の積分表示を持つ．

上記の結果の保型 L 関数への応用に対する展望の1つについて簡単に述べておく．Andrianov は2次の正則な Siegel カスプ形式に対して，L 関数（スピノール L 関数と言われる）を構成し，関数等式および解析接続を証明した．菅野孝史氏はこの結果を $SO(2, q)$ の場合へ拡張した．一方で，堀正氏は2次の Siegel 波動形式に対して Andrianov の L 関数の類似を構成し，丹羽氏の Siegel-Whittaker 関数の明示公式を用いてその関数等式を与えた．従って，$SO(2, q)$ の波動形式に対しても菅野氏と同様のゼータ積分を考えることによって L 関数の関数等式を得ることができると考えられる．