論文審査の結果の要旨

氏名　　石井　卓

論文題目：**Siegel-Whittaker functions on $SO_o(2,q)$ for class one principal series representations**

($SO_o(2,q)$ 上のクラス 1 主系列表現に対するジーゲルーホイッタッカー関数について)

多変数保型形式の研究において，局所体上の代数群の認容表現の，意味のある各種の具体的な実現あるいは模型が基本的で重要な役割を果たす．しかしながら研究の現状は実数体上の場合に限っても，知られている結果は極めて貧弱で，この状態は大域的な深い研究に進むときの隘路になっている．

この論文で，論文提出者の石井卓氏は，Ⅳ型対称領域上の波動保型形式のフーリエ展開に登場するある一般化された球関数について，重複度 1 定理を示し，またその一意に定まる球関数の動径成分の明示的な積分表示も得た．保型形式研究においてフーリエ展開の果たす基本的な役割を思えば，これは極めて基本的で重要な結果と言える．

先ず少し視点を変えて，問題をリー群の表現論的な言葉で定式化する．一般化された球関数の定義を思い起こそう．実簡約リー群 G のリー環を $\mathfrak{g}$ と書く．群 G の極大コンパクト部分群 K を固定する．さらに G の閉部分群 R およびその平滑な既約表現 η を取る．G の既約認容表現 π に対して，次の $(\mathfrak{g},K)$ 加群の間の絡作用素の空間を考える．

$$\mathscr{I}(\pi,\eta)=\mathrm{Hom}_{(\mathfrak{g},K)}(\pi,C^{\infty}\mathrm{Ind}_{R}^{G}(\eta)).$$

$\mathscr{I}(\pi,\eta)$ の元 Φ に対して，$\mathrm{Im}(\Phi)$ という π の $C^{\infty}\mathrm{Ind}_{R}^{G}(\eta)$ における実現を π に対する一般化された球関数と呼ぶ．このとき次のような問題を考える．

(1) $\mathscr{I}(\pi,\eta)$ の次元を決定せよ．さらにある増大条件を課したとき 1 次元になるかどうか調べよ（重複度 1 定理）．

(2) 一般化された球関数の (G 上の関数としての) 明示公式を求めよ．

適切な R に対してこの種の問題を考えることは、実数体上に限らず保型形式の局所理論の一つの中核的な問題である．例えば R が G の極大べき単部分群で η がその既約ユニタリ指標である場合，この球関数は Whittaker 関数と言われ多くの研究がなされている．

この論文の場合 $G=SO_o(2,q)$ とし R は以下のように定める．Siegel 放物部分群 $P_s=L_s\ltimes N_s$，ξ を N_s のユニタリ指標として，絡作用素の空間 $\mathrm{Hom}_{(\mathfrak{g},K)}(\pi,C^{\infty}\mathrm{Ind}_{N_s}^{G}(\xi))$ をナイーヴに考えると、π が (クラス 1) 主系列表現の場合にはこの空間は無限次元になる．そこで N_s を含む G の閉部分群 R を次のように取る．$SO(\xi)$ を ξ の L_s における固定部分群の単位元の連結成分とし，R を N_s と $SO(\xi)$ の半直積とする．すると $SO(\xi)$ は ξ が「定値」の場合は $SO(q-1)$ に，また「不定値」の場合には $SO_o(1,q-2)$ に同型になる．さらに $SO(\xi)$ の既約ユニタリ表現 χ を 1 つ固定し，$\eta=\chi\cdot\xi$ とおく．このときの一般化された球関数をこの論文では Siegel-Whittaker 関数と呼ぶ．

$G=Sp(2,\mathbf{R})$ で ξ が定値のとき，丹羽伸二氏はクラス 1 主系列表現 π に対して，絡作用素の空間の重複度 1 定理および Siegel-Whittaker 関数の明示公式を得ている．本論文

の主結果は、これを$SO_o(2,q)$の場合に拡張したものである．ここで$\mathfrak{sp}(2,\mathbf{R})\cong\mathfrak{so}(2,3)$, $\mathfrak{su}(2,2)\cong\mathfrak{so}(2,4)$に注意する．他方、論文提出者の石井氏は以前の研究で，$Sp(2,\mathbf{R})$のクラス１に限らない主系列表現に対して，重複度なし定理および球関数のある特異因子に沿った「境界値」の明示公式を既に得ている．

Siegel-Whittaker 関数に限らず，クラス１主系列表現に対する球関数はG/K上の不変微分作用素の同時固有関数として特徴付けられる．この論文では、カシミール作用とは異なるもう一つの４次の生成元を直接計算により明示的に求めた．さてここで言う Siegel-Whittaker 関数は，$SO(\xi)$の表現空間上に値をとるベクトル値関数であり，それを明示的に記述するためにξが定値のときはコンパクト群$SO(\xi)\cong SO(q-1)$の既約表現の Gel'fand-Zetlin 基底を用いて実現し，先に求めた不変微分作用素と合わせて Siegel-Whittaker 関数の満たす偏微分方程式系を得る．ここでπがクラス１であるため Siegel-Whittaker 関数は右K-不変であることが効いて，Gel'fand-Zetlin 基底を用いて表したときに偏微分方程式系の解の非零成分は１つしか残らない，つまり偏微分方程式系は１つの関数に対する方程式系になることがわかる．さらにある初等関数の乗数で方程式を変形すると問題は$q=3$の場合にほぼ帰着できる．主定理を述べる．

主定理 (定理 7.1) クラス１主系列表現$\pi_{(\nu_1,\nu_2)}$に対して，$\nu_1,\nu_2,\nu_1\pm\nu_2$はいずれも非整数と仮定する．$N_s$の標準的な定値ユニタリ指標$\xi_0$と，$SO(\xi)\cong SO(q-1)$の最高ウエイト$\lambda=(\lambda_1,\dots,\lambda_{[(q-1)/2]})$の有限次元既約表現$\chi_\lambda$に対して$\eta=\chi_\lambda\cdot\xi_0$とする．このとき，

(1) λが$(\lambda_1,0,\dots,0)$の形でないときは

$$\dim_{\mathbf{C}}\mathrm{Hom}_{(\mathfrak{g},K)}(\pi_\nu, C^\infty\mathrm{Ind}_R^G(\eta))=0.$$

(2) $\lambda=(\lambda_1,0,\dots,0)$のときは

$$\dim_{\mathbf{C}}\mathrm{Hom}_{(\mathfrak{g},K)}(\pi_\nu, C^\infty\mathrm{Ind}_R^G(\eta)^{\mathrm{rap}})=1,$$

ここで，$C^\infty\mathrm{Ind}_R^G(\eta)^{\mathrm{rap}}$は$C^\infty\mathrm{Ind}_R^G(\eta)$の中の急減少関数全体のなす$(\mathfrak{g},K)$部分加群である．さらに，この絡作用素の元に対する Siegel-Whittaker 関数はある Euler 型の積分表示を持つ．

この結果は次のような保型L関数に対する応用が期待できる．Andrianov は 70 年代に２次の正則 Siegel 尖点形式に対して，スピノールL関数と言われるL関数を構成し，その関数等式および解析接続を証明した．後に菅野孝史はこの結果を$SO(2,q)$の場合へ拡張した．一方で，堀正は２次の Siegel 波動形式に対して Andrianov のL関数の類似を構成し，丹羽の Siegel-Whittaker 関数の明示公式を用いてその関数等式を与えた．従って$SO(2,q)$の波動形式に対しても菅野の結果を一般化し，同様のゼータ積分を考えることによってL関数の関数等式を得られるであろう．

まとめると、以上に提示した結果はG/Kがエルミート型でIV型という階数が２である場合に、Siegel 放物群に付随する球部分群Rに関する一般化された Whitttaker 関数を具体的に決めた結果である．高階の実リー群に対する，数少ない，一般化された Whittaker 関数に関する，かなり一般的な結果である．

結果の重要性は既に最初に述べた．さらに付け加えれば，既に発表された石井氏の論文もそうであるが，この博士論文の中にもさらなる一般化のためにいろいろ示唆する点が散見される．よって，論文提出者 石井卓 は，博士（数理科学）の学位を受けるにふさわしい十分な資格があると認める．