論文内容の要旨

論文題目

Calabi–Yau threefolds with infinitely many divisorial contractions

(和訳: 無限個の因子的収縮写像を持つ
3次元Calabi–Yau多様体)

氏名 上原 北斗

本論文の目的は、無限個の因子的収縮写像を持つ3次元Calabi–Yau多様体について考察することである。ここでCalabi–Yau多様体とは複素数体上の滑らかな射影的代数多様体であってその標準束が自明であり、かつその Albanese 多様体が0次元のものとする。Morrison の Cone 予想([1])が正しければCalabi–Yau多様体のネフ錐への自己同型群による作用が有理多面体の基本領域を持つ。よって、無限個の収縮写像を持つCalabi–Yau多様体の自己同型群は無限群になると考えられる。逆に自己同型群が無限のとき、そのCalabi–Yau多様体が無限個の収縮写像を持つことはよく起こると思われ、従って冒頭の3次元Calabi–Yau多様体を調べるのは3次元Calabi–Yau多様体を分類するという立場から見ても重要であると考えられる。

定義 Xを3次元Calabi–Yau多様体、$\varphi : X \to Y$を$\varphi^* H \cdot c_2 = 0$をみたすような収縮写像とする。但し$H$は$Y$上の豊富因子であり、また$c_2$は第2種チャーン類$c_2(X)$を表すとする。このような写像を$c_2$-収縮写像と呼ぶ。

c_2-収縮写像をもつ 3 次元 Calabi–Yau 多様体は Y の次元が 2 以上の時においては、小木曽氏によって分類されている ([2] 参照)。以下 X は 3 次元 Calabi–Yau 多様体のこととし、$\{\varphi_i\}_{i\in I}$ を X 上の全ての因子的収縮写像の集合とする。次は Morrison の Cone 予想の特別な場合である。

問題 1　集合 I の自己同型群の作用による商集合は有限か？

さらに $i \in I$ に対し E_i で φ_i の例外集合を表す。また $*$ が $=, <, >$ のいずれかを表す時、それぞれに対し $I_{c_2*0} := \{i \in I \mid E_i \cdot c_2 * 0\}$ とおく。

3 次元 Calabi–Yau 多様体上のネフ因子は何倍かすれば定点がないと予想されていて（この性質を半豊富、この予想を半豊富予想と呼ぶ）、この半豊富予想と Morrison の Cone 予想が正しければ、自己同型群が無限であるような 3 次元 Calabi–Yau 多様体の多くは c_2-収縮写像を持つと考えられる (詳細は本論文参照)。本論文ではこの考察を踏まえ、$I_{c_2=0}$ が無限であるような 3 次元 Calabi–Yau 多様体は一般ファイバーが楕円曲線となる c_2-収縮写像を常に持つことを直接示し、上に述べた小木曽氏の分類を使ってその構造を完全に決定した。さらにこの構造定理を使って $I_{c_2=0}$ の自己同型群の作用による商集合が有限であることを示した。またこれとは全く別に $I_{c_2<0}$ は常に有限集合となることも得た。これらの結果から問題 1 は問題 2 に帰着される。

問題 2　$I_{c_2>0}$ の自己同型群の作用による商集合は有限か？

集合 $I_{c_2=0}$ が無限であるような 3 次元 Calabi–Yau 多様体は、本論文中で構成されている。

また Morrison の Cone 予想が正しければ、すべての $i \in I$ に対し $E_i \cdot c_2$ は有界となるはずである。実際に E_i が正規でない場合についてはこの数たちは有界となることが本論文中で示されている。

参考文献

[1] D. Morrison, Compactifications of moduli spaces inspired by mirror symmetry, Astérisque 218, Soc. Math. France, Paris (1993), 243-271.

[2] K. Oguiso, J. Sakurai, Calabi–Yau threefolds of quotient type, Asian J. Math. 5, (2001).