論文の内容の要旨

論文題目:

Freeness of adjoint linear systems on threefolds with terminal Gorenstein singularities, non-Gorenstein $\mathbb{Q}$-factorial terminal singularities or some quotient singularities

(3次元正規射影多様体上のGorenstein端末特異点、およびGorensteinではない$\mathbb{Q}$-分解的端末特異点、およびある種の商特異点における線形系の自由性について)

氏名　垣見　信之

以下、すべて複素数体$\mathbb{C}$上で考える。また敬称は略して表記する。自分がこの論文で扱う題材は「特異点を持つ3次元正規射影多様体X上の線形系$|K_X+L|$のある種の特異点における自由性について」である。

自分の結果は次にあげる藤田自由性予想の3次元正規射影多様体上のある種の特異点における一般化である。

予想 0.1. Xを滑らかな射影多様体でLはX上の豊富な因子であるとする．もし$m \geq dimX+1$ならば, 線形系$|K_X+mL|$は自由である．

滑らかな2次元射影多様体上では, Reider [Rdr] が曲面上の線形系$|K_X+L|$の研究にBogomolov's instability theoremを適用することにより藤田自由性予想よりも強い形で証明した．そのため次ぎにあげる強い形の自由性に関する予想(藤田自由性強予想)が考えられるようになった．

予想 0.2. Xをn次元正規射影多様体とし, $x_0 \in X$を滑らかな点, かつLを豊富なカルティエ因子とする．点x_0を含む任意のp次元部分多様体Wに対して$L^p \cdot W \geq n^p (1 \leq p \leq n-1)$かつ$L^n > n^n$が成り立つとする．そのとき$|K_X+L|$は点$x_0$で自由となる．

Ein と Lazarsfeld [EL] によって 3 次元の藤田自由性予想は証明されたが，その証明はとても難しい．川又 [Ka] は 3 次元の藤田自由性強予想を解決し、さらに 4 次元の藤田自由性予想を解決した．Helmke[He1][He2] は n 次元の藤田自由性強予想解決に向けて取り組んでいる。

正規射影曲面上の特異点に対する他の人の結果を述べておく．Ein と Lazarsfeld [EL], 松下 [Mat], 川内 [KM][Kwc], と Maşek [Ma] らは Reider [Rdr] の結果を特異点の場合に拡張している．これらの特異点における結果はすべて滑らかな場合よりも条件が良くなっている．さらに Langer [La1][La2] がランク 2 の再帰的な層を正規射影曲面に適用することにより最も良い 2 次元上の結果を得ている．これらの 2 次元の結果より，任意の次元でも特異点であるほど滑らかな点よりも条件が良くなるであろうことが一般的に予想されることになった．3 次元の特異点上でも Ein と Lazarsfeld [EL] の滑らかな点での結果を拡張することによりいくつか結果（小木曽と Peternell[OP] または Ein, Lazarsfeld と Maşek [ELM] または松下 [Mat] の結果）がでていた．しかしそれらの結果は特異点において滑らかな点よりも条件が悪くなるものばかりであった．そのため 3 次元上では特異点であっても滑らかな場合の条件よりも悪くなるのではないか，と考える人もでてきていた．

我々は 3 次元正規射影多様体が特異点をもつ場合についてある種の特異点における線形系 $|K_X+L|$ が自由となるための条件を考える．X を 3 次元正規射影多様体とし、x_0 を X 上の点とし、L を豊富な $\mathbb{Q}$-カルティエ因子で K_X+L が点 x_0 でカルティエ因子であるようなものとする。そのとき，以下の結果を示した．

定理 0.3. 点 $x_0 \in X$ を *Gorenstein* 端末特異点とする。$L^3 > (\sqrt[3]{2}+\sqrt{3})^3$, 点 x_0 を含むすべての曲面 S に対して $L^2S > (\sqrt[3]{2}+\sqrt{3})^2$, かつ点 x_0 で滑らかとなるようなすべての曲線 C に対して $LC > (\sqrt[3]{2}+\sqrt{3})/\sqrt[3]{2}$ を仮定する。そのとき，線形系 $|K_X+L|$ は点 x_0 で自由になる (注 $2.991 < \sqrt[3]{2}+\sqrt{3} < 3$).

定理 0.4. 点 $x_0 \in X$ を $(1/r, a/r, b/r)$ という型の孤立商特異点とする．(注:ある整数 $r>0$ に対して, $(r,a)=1$ かつ $(r,b)=1$ である.) $L^3 > 3^3/r$ かつ $(S,x_0) \cong \mathbb{C}^2/\mathbb{Z}_r(1,a')$ $(1,a')=(1,a),(1,b)$, または (a,b) となるようなすべての曲面 S に対して $L^2S \geq 3^2/r$ かつ $(S,x_0) \cong (x^2+f(y,z)=0$ または $xy+z^{n+1}=0 \subset \mathbb{C}^3/\mathbb{Z}_r(1,a",b"))$ $(1,a",b")=(1,a,b),(1,b,a),(a,1,b),(a,b,1),(b,1,a)$, または $(b,a,1)$ となるようなすべての曲面 S に対して $L^2S \geq 3/r$ かつ点 x_0 で滑らかとなるようなすべての曲線 C に対

して $LC \geq 3/r$ を仮定する．そのとき，線形系 $|K_X + L|$ は点 x_0 で自由になる．

定理 0.5. 点 $x_0 \in X$ を $\mathrm{ind}_{x_0} X = r > 0$ であるような商特異点でない $\mathbb{Q}$-分解的な端末特異点とする．$L^3 > 2^3 \cdot 2/r$, 点 x_0 を含むすべての曲面 S にたいして $L^2 S \geq 2^2 \cdot 2/r$ かつ点 x_0 で滑らかとなるようなすべての曲線 C に対して $LC \geq 2/r$ を仮定する．そのとき，線形系 $|K_X + L|$ は点 x_0 で自由になる．

系 0.6. X を $\mathbb{Q}$-分解的端末特異点しか持たないような多様体とする．$x_0 \in X$ を $\mathrm{ind}_{x_0} X = r > 0$ であるような点とする．$L^3 > 3^3/r$, 点 x_0 を含むすべての曲面 S にたいして $L^2 S \geq 3^2/r$ かつ点 x_0 で滑らかとなるようなすべての曲線 C に対して $LC \geq 3/r$ を仮定する．そのとき，線形系 $|K_X + L|$ は点 x_0 で自由になる．

我々[K1] は川又 [Ka] の手法を正規射影多様体上の端末 Gorenstein 特異点または $1/r(1,1,1)$ という型の商特異点に適用することにより，それらの点で線形系が自由となる条件が滑らかな場合より良くなるという予想どうりの結果を得た．注意するべきこととしては、我々[K1, Theorem 3.8] のなかで標準だが端末特異点でない場合の証明が間違っている。そのため [K1, Theorem 3.8, Corollary 3.9, Corollary 3.10] は間違っている。Lee [L1][L2] は自分とは独立に多様体に分解的かつ Gorenstein 標準特異点のみをもつという仮定をつけることにより自由性に関するある種の結果を出している。

我々[K3] はさらに研究をすすめるため正規多様体上の点とその点における重みつきブローアップを考えあわせて，重みつき multiplicity という概念と $\mathbb{Q}$-カルティエ因子に対する重みつき order という概念を定義した．

定義 0.7. X を n 次元正規多様体, x_0 は X 上の点, $\mu : Y \to X$ は例外因子 E を持つ点 x_0 での重みつきブローアップとする．$W \subset X$ を点 x_0 で正規であるような次元 p の部分多様体とし, $\bar{W}$ を W の厳密変換とし, $\bar{W}$ 上の $\bar{D}_{\bar{W}}$ を W 上の効果的な $\mathbb{Q}$-カルティエ因子 D_W の厳密変換とする．W 上の点 x_0 とその点での μ における重みつき *multiplicity* ($\text{w-mult}_{\mu:x_0} W$) は次のように定義される．

$$\dim \frac{O_{W,x_0}}{\mu_* O_{\bar{W}}(-hE|_{\bar{W}})} = \text{w-mult}_{\mu:x_0} W \cdot \frac{h^p}{p!} + \text{lower term in } h.$$

W 上の因子 D_W に対する点 x_0 とその点での μ における重みつき *order* は次のように定義される．(w-ord$_{\mu:x_0}D_W$) は

$$\mu^*(D_W) = \bar{D}_{\bar{W}} + \text{w-ord}_{\mu:x_0}D_W \cdot E|_{\bar{W}}.$$

そして重みつき multiplicity の計算を任意次元のある商特異点と商特異点でない 3 次元端末特異点に対して計算した．

定理 0.8. $(X, x_0) \cong \mathbb{C}^n/\mathbb{Z}_r(1, a_1, \cdots a_{n-1})(r > 0, (r, a_1) = 1,$ かつ $0 \leq a_j < r(1 \leq j \leq n-1), r, a_j \in \mathbb{Z})$ という商特異点とする．$l := \min\{i \mid a_j i \equiv i(\ mod\, r)\ (1 \leq j \leq n-1)\ for\ 0 < i \leq r\}$ とする．$\mu : Y \to X$ は点 x_0 における X の $\mathrm{wt}(x_0, x_1, \cdots, x_{n-1}) = (l/r, l/r, \cdots, l/r)$ で μ の例外因子 E を持つような重みつきブローアップとする．そのとき，

$$\text{w-mult}_{\mu:x_0}X = r^{n-1}/l^n.$$

定理 0.9. (X, x_0) を $\mathbb{C}$ 上 $\mathrm{ind}_{x_0}X = r > 1$ となるような商特異点でない 3 次元端末特異点であって，$\mu : Y \to X$ を $\mathrm{wt}(x, y, z, u) = (1, 1, 1, 1)$ で μ の例外因子 E を持ち $K_Y = \mu^*K_X + E$ となるような重みつきブローアップとする．そのとき，

$$\text{w-mult}_{\mu:x_0}X = 2/r.$$

この重みつき multiplicities を適用することにより，我々は，定理 (定理 0.4, 0.5) のように 3 次元正規射影多様体上で線形系 $|K_X + L|$ がある種の商特異点または商特異点でない $\mathbb{Q}$-分解的端末特異点で自由となる数値的な条件を得た．これらの条件は滑らかな場合よりもよくなっている．さらに定理 0.4 が最良であることを示す例もある．

例 0.10. $X = \mathbb{P}(1, 1, 1, r)$ かつ $x_0 = (0 : 0 : 0 : 1)$ とする．そのとき x_0 は $\mathbb{C}^3/\mathbb{Z}_r(1, 1, 1)$ という型の商特異点であり，標準因子は $K_X = \mathcal{O}(-r-3)$ となっている．もし点 x_0 で $K_X + L$ がカルティエであり，L が効果的とすると，$L = \mathcal{O}(rk+3)(k \in \mathbb{Z}, rk+3 \geq 0)$ である．もし $L = \mathcal{O}(3)$ であり 曲面 $S = \mathbb{P}(1, 1, r)$ であり曲線 $C = \mathbb{P}(1, r)$ であるならば，$|K_X + L|$ は点 x_0 で自由でなくてかつ $L^3 = 27/r$ で，$L^2S = 9/r$ であり，$LC = 3/r$ となる．

$L^3 > 27/r$ だが $LC < 3/r$ となる曲線 C があり $K_X + L$ が商端末特異点で自由でないという例もある．

例 0.11. $X = \mathbb{P}(1, a, r-a, r)$ $(r > 2a)$ かつ $x_0 = (0:0:0:1)$ とする．x_0 は $\mathbb{C}^3/\mathbb{Z}_r(1, a, r-a)$ という型の商端末特異点であり，標準因子は $K_X = \mathcal{O}(-2r-1)$ となっている．もし $K_X + L$ が点 x_0 でカルティエであり，L が効果的とすると，$L = \mathcal{O}(rk+1) (k \in \mathbb{Z}, rk+1 \geq 0)$ である．もし $L = \mathcal{O}(r+1)$ で $C = \mathbb{P}(r-a, r)$ であるならば，$|K_X + L|$ は点 x_0 で自由でなくかつ $L^3 = (r+1)^3/ra(r-a) > 27/r$ だが $LC = (r+1)/r(r-a) < 3/r$ となる．

さらに我々は自由性に関する Langer の結果 [La2] の一部である A 型となるログ端末特異点における線形系 $|K_X + L|$ が自由となる条件の別証明をあたえた．3 次元の場合と同様にその定理が A 型となるログ端末特異点に対して最良であることを示す例もあり、$L^2 > 4/r$ だが $LC < 2/r$ となる曲線 C があって $|K_X + L|$ が A 型のログ端末特異点で自由でないという例もある．

次にあげる命題が自由性に関する我々の結果の証明において重要な役割を果たしている。

命題 0.12 ([K1, 2.2] cf [Ka, 2.3]). X を n 次元正規射影多様体とする。$x_0 \in X$ は KLT な点とする。そして L を豊富な $\mathbb{Q}$-カルティエ因子であって点 x_0 で $K_X + L$ がカルティエ因子となるようなものとする。以下 3 つの条件を満たすような効果的な $\mathbb{Q}$-カルティエ因子 D が存在すると仮定する:

(1) $D \sim_{\mathbb{Q}} tL$ でかつ $t < 1$ となるような有理数 t が存在する。
(2) 点 x_0 で (X, D) が LC である。
(3) $\{x_0\} \in CLC(X, D)$ である。

そのとき線形系 $|K_X + L|$ は点 x_0 で自由となる。

この命題の仮定を満たすような効果的な $\mathbb{Q}$-カルティエ因子 D を上手に構成すればよい。我々の自由性に対する証明は川又 [Ka] の証明方法とその部分的な改良版である Helmke[He2] の証明方法をほとんどそのまま我々が考える特異点上に拡張し適用しているので川又 [Ka] および Helmke[He2] の証明と非常によく似ている．しかしながら，重みつきブローアップと重みつき multiplicity と局所的な重みつき discrepancy と重みつき wildness に対してより注意深くかつ細かい解析が必要である．

謝辞 この論文を書くにあたって、著者は多くの数学的示唆、激励を下さった川又雄二郎教授には深く感謝しております。また、著者を様々な

面で励ましてくださった藤田隆夫教授、小木曽啓示助教授、小林正典助教授、松下大介助教授、高木寛通助手、皆川龍博助手、佐藤　拓博士にはたいへん感謝しております。最後にこの論文について有益な議論を交わした上原北斗さん、川北真之君にこの場を借りて感謝します。

参考文献

[EL] L. Ein and R. Lazarsfeld: Global generation of pluricanonical and adjoint linear series on smooth projective threefolds. J. Amer. Math. Soc. 6 (1993) 875 – 903

[ELM] L. Ein, R. Lazarsfeld, and V. Maşek: Global generation of linear series on terminal threefolds. Internat. J. Math. 6 (1995) 1 – 18

[F] T. Fujita: Remarks on Ein-Lazarsfeld criterion of spannedness of adjoint bundles of polarized threefold. preprint e-prints/alg-geom/9311013

[He1] S. Helmke: On Fujita's conjecture, Duke Math. J. 88 (1997), 201 – 216

[He2] S. Helmke: On global generation of adjoint linear systems, Math. Ann. 313 (1999), 635 – 652

[K1] N. Kakimi: Freeness of adjoint linear systems on threefolds with terminal Gorenstein singularities or some quotient singularities. J. Math. Sci. Univ. Tokyo 7 (2000) 347 – 368

[K2] N. Kakimi: On the multiplicity of terminal singularities on threefolds. preprint e-prints/math.AG/0004105

[K3] N. Kakimi: Freeness of adjoint linear systems on threefolds with non-Gorenstein $\mathbb{Q}$-factorial terminal singularities or some quotient singularities, preprint

[KM] T. Kawachi and V. Maşek: Reider-type theorems on normal surface. J. Alg. Geom. 7 (1998) 239 – 249

[Kwc] T. Kawachi: On the base point freeness of adjoint bundles on normal surfaces. manuscripta math. 101 (2000) 23 – 38

[Ka] Y. Kawamata: On Fujita's freeness conjecture for 3-folds and 4-folds. Math. Ann. 308 (1997) 491 – 505

[L] R. Lazarsfeld: Lectures on linear series. Complex Algebraic Geometry - Park City / IAS Math. Ser., 1996

[La1] A. Langer: Adjoint linear systems on normal surfaces II. J. Alg. Geom. 9 (2000) 71 – 92

[La2] A. Langer: Adjoint linear systems on normal log surface. ICTP preprint March 1999 to appear Compositio Math.

[L1] S. Lee: Remarks on the pluricanonical and the adjoint linear series on projective threefolds. Comm. Alg. 27 (1999) 4459 – 4476

[L2] S. Lee: Quartic-canonical systems on canonical threefolds of index 1. preprint

[Ma] V. Maşek: Kawachi' s invariant for normal surface singularities. Internat. J. Math. 9 (1998), no. 5, 623 – 640

[Mat] D. Matsushita: Effective base point freeness. Kodai. Math. J. 19 (1996) 87 – 116

[OP] K. Oguiso and T. Peternell: On polarized canonical Calabi-Yau threefolds. Math. Ann. 301 (1995) 237 – 248

[Rdr] I. Reider: Vector bundles of rank 2 and linear systems on algebraic surface, Ann. Math. 127 (1988) 309 – 316