論文審査の結果の要旨

氏 名 垣 見 信 之

論文提出者 垣見信之 は, 特異点を持つような代数多様体に対する一般化された藤田の自由予想を研究した.

n 次元の滑らかな射影的代数多様体 X とその上の豊富因子 H, および $n+1$ 以上の整数 m に対して, 随伴線形系 $|K_X+mH|$ が自由になるというのが, もともとの藤田の自由予想であるが, この予想は次のような局所的な予想に一般化される:「n 次元の正規な射影的代数多様体 X, その上の滑らかな点 $x_0 \in X$, および豊富なカルティエ因子 L において, もしも不等式 $L^n > n^n$ が成り立ち, しかも任意の整数 p および x_0 を含む任意の p 次元部分多様体 W に対して, 不等式 $L^p \cdot W \geq n^p$ が成り立つならば, 線形系 $|K_X+L|$ は点 x_0 で自由となる.」もともとの藤田の自由予想は 4 次元まで, 局所バージョンは 3 次元までは正しいことが知られている.

垣見氏は点 $x_0 \in X$ が特異点である場合を考えた. この場合, $L^p \cdot W$ などの評価式の右辺は特異点の不変量にも依存することになる.

この問題は $n=2$ の場合にはよく研究されていて, ほぼ完璧な答えが得られている. そこで注目すべきことは, 評価式の右辺が, 特異点に対してのほうが非特異点の場合よりも小さくなり, 弱い仮定の下で自由性が従うことである. ところが, $n=3$ の場合に得られている結果では, 評価式の右辺が, 特異点に対してのほうが非特異点の場合よりも大きくなってしまい, 最善の結果ではないと思われていた.

垣見氏の得た結果を述べる. 3 次元正規射影多様体 X, その上の点 x_0, および豊富な $\mathbb{Q}$-カルティエ因子 L で K_X+L が点 x_0 でカルティエ因子であるようなものを考える.

(1) 点 $x_0 \in X$ が Gorenstein 端末特異点であるとする. もしも, 以下の不等式が成り立つならば, 線形系 $|K_X+L|$ は点 x_0 で自由になる:

(i) $L^3 > (\sqrt[3]{2}+\sqrt{3})^3$,

(ii) 点 x_0 を含む任意の曲面 S に対して $L^2 \cdot S > (\sqrt[3]{2}+\sqrt{3})^2$,

(iii) 点 x_0 で滑らかとなるような任意の曲線 C に対して $L \cdot C > (\sqrt[3]{2}+\sqrt{3})/\sqrt[3]{2}$.

(2) 点 $x_0 \in X$ が $\mathbb{C}^2/\mathbb{Z}_r(a_1, a_2, a_3)$-型の孤立商特異点であるとする．ここで $(r, a_i) = 1$ $(i = 1, 2, 3)$ である．もしも, 以下の不等式が成り立つならば, 線形系 $|K_X + L|$ は点 x_0 で自由になる:

(i) $L^3 > 3^3/r$,

(ii) $(S, x_0) \cong \mathbb{C}^2/\mathbb{Z}_r(a_i, a_j)$ $(i \neq j)$ となるような任意の曲面 S に対して $L^2S \geq 3^2/r$, $(S, x_0) \cong (x^2 + f(y, z) = 0) \subset \mathbb{C}^3/\mathbb{Z}_r(a_i, a_j, a_k)$ $(i \neq j \neq k)$ または $(S, x_0) \cong xy + z^{n+1} = 0 \subset \mathbb{C}^3/\mathbb{Z}_r(a_i, a_j, a_k)$ $(i \neq j \neq k)$ となるような任意の曲面 S に対して $L^2 \cdot S \geq 3/r$,

(iii) 点 x_0 で滑らかとなるような任意の曲線 C に対して $L \cdot C \geq 3/r$.

(3) 点 $x_0 \in X$ が超曲面でも商特異点でもない $\mathbb{Q}$-分解的な端末特異点とする．もしも, 以下の不等式が成り立つならば, 線形系 $|K_X + L|$ は点 x_0 で自由になる:

(i) $L^3 > 2^3 \cdot 2/r$,

(ii) 点 x_0 を含む任意の曲面 S に対して $L^2 \cdot S \geq 2^2 \cdot 2/r$,

(iii) 点 x_0 で滑らかとなるような任意の曲線 C に対して $L \cdot C \geq 2/r$.

系として, 以下の主張が証明された: X が $\mathbb{Q}$-分解的な端末特異点しか持たない 3 次元射影的代数多様体で, $x_0 \in X$ を特異点指数が r である点とする．もしも, 以下の不等式が成り立つならば, 線形系 $|K_X + L|$ は点 x_0 で自由になる:

(i) $L^3 > 3^3/r$,

(ii) 点 x_0 を含む任意の曲面 S に対して $L^2 \cdot S \geq 3^2/r$,

(iii) 点 x_0 で滑らかとなるような任意の曲線 C に対して $L \cdot C \geq 3/r$.

以上の結果は 3 次元多様体上の線形系の理論に大きく貢献するものである. よって, 論文提出者 垣見信之 は, 博士 (数理科学) の学位を受けるにふさわしい充分な資格があると認める.