論文審査の結果の要旨

氏 名 加 藤 整

流体の 3 次元一様等方性乱流では、Reynolds 数が増加し散逸波数が増加するにつれて普遍的統計性質を持つ波数領域 (慣性領域) が増大することが知られている。この普遍的統計性質のうち代表的なものは、距離 r だけ離れた 2 点の速度の差の統計性質であり、中でも速度差の縦成分 $\Delta u(r)$ の構造関数 (p 次モーメント) のスケーリング指数 ζ_p ($<(\Delta u(r))^p> \sim r^{\zeta_p}$) については多くの研究が行なわれてきた。特に Kolmogorov(1941) は次元解析から $\zeta_p = p/3$ (Kolmogorov スケーリング) を予想し、低次モーメント ($\zeta \leq 5$) では実験と良く一致することが確認されたが、高次のモーメントについてはこの予想からのずれ (異常スケーリング) が見出された。

現在、このずれの原因は、乱流の間欠性、すなわちエネルギーカスケードの空間的非一様性と考えられ、これに基づいて、対数正規分布モデル、ランダム乗法過程モデル、マルチフラクタルモデル、など多くのモデルが提案されている。これらのモデルは、何らかの現象論的仮定のもとにスケーリング指数の振舞いを説明するためのものであるが、このような間欠性の力学的な起源については、積極的提案は殆んどなされていない。

一方、1980 年代から乱流の普遍的統計性質を力学系理論的な観点から捉える試みが行なわれてきた。しかし乱流の次元が巨大であるため、力学系的手法が適用可能な対象は数値的にもごく少数の性質に限られており、乱流の最も顕著な性質である間欠的エネルギーカスケード過程を相空間の軌道の性質としてどのように解釈すべきかは現在も全く不明なままである。

このような背景のもとに加藤氏は、巨大次元による困難を避けるために Navier-Stokes 乱流そのものではなく、間欠性を含む統計性質について Navier-Stokes 乱流に類似した統計性質を持つことが知られているシェルモデル (数十次元程度の常微分方程式による乱流モデル) を取り上げ、シェルモデルにおける乱流の統計性質、特に間欠性、について力学系的解釈を与えることを試みた。

加藤氏は、このシェルモデルが乱流解をもつパラメータ領域において、まず、不安定定常解および不安定周期解を数値的に求め、それらの解の性質を調べた。これは 24 次元程度の力学系における不安定解を求める作業であり、数値的にも相当の困難を伴うものであるが、加藤氏は、非線形項に人為的なパラメータを導入しそのパラメータをも含む分岐図を作成して探索経路を決定することにより、1 つの不安定定常解と 2 つの不安定周期解を求めることに成功した。

このうち不安定定常解は、ほぼ Kolmogorov スケーリングを満たす解であり、もともとシェルモデルが非粘性のときにもつ定常解が粘性によって変形されたものと考えられる。また不安定周期解のうちの一つは、相空間における振舞いが非常に単純なもので、定常的なエネルギーカスケードを与え、数値誤差の範囲内で構造関数が Kolmogorov スケーリングを満たすものである。これら 2 つの不安定解は、いずれも、Kolmogorov が提案したスケーリングを満たすものであり、従って、実際に実現される乱流解とは異なる統計性質を持っている。

これに対しもう一つの不安定周期解は、高波数になるほど間欠的になるエネルギーカスケード過程を伴うものである(この理由で以下ではこの解を「間欠解」と呼ぶ)。さらに、この解による構造関数のスケーリング指数は、同じパラメータにおける乱流解の示すスケーリング指数と非常に良い一致を示すことを、加藤氏は見出した。この一致は、乱流の統計性質の基本的部分が、単一の不安定周期解の性質によって記述することができることを示しており、驚くべき結果である。

さらに加藤氏は、乱流解を与えるアトラクターとこの間欠解の関係を調べ、間欠解をある位相変換で移したもの全体が、アトラクターを近似することを見出した。この位相変換は、シェルモデルにおける一つの解を別の解に変換するもので、Navier-Stokes 方程式における空間並進変換に対応するものである。このようなアトラクターと間欠解の関係は、シェルモデル乱流の統計性質が単一の不安定周期解 (間欠解) の性質によって記述されることの理由を与えている。

このように加藤氏の結果は、シェルモデル乱流の統計性質について、従来とは全く異なる視点からの新しい描像を与えている点で高く評価できるものである。またこの描像は、Navier-Stokes 乱流の統計性質の起源についても示唆を与えるものであり、今後の研究の一つの方向を与えている。

よって、論文提出者加藤整は、博士（数理科学）の学位を受けるにふさわしい充分な資格があると認める。