論文内容の要旨

論文題目 Complex Contact Manifolds with Legendrian Vector Fields
ルジャンドリアンなベクトル場を持つ複素接触多様体

氏名 児玉 大樹

実3次元多様体において, 余次元1の葉層構造は完全可積分な接平面場と見なすことができ, 一方で接触構造は至る所で積分不可能な接平面場と見なすことができる. この二つは研究の手法において, 様々な類似点が見られる. 特に Yasha Eliashberg 氏と William Thurston 氏はコンフォリエーションという概念を導入することにより, 葉層構造と接触構造を統一的に扱うことに成功し, 向きづけられた閉3次元多様体上の余次元1の C^2 級葉層構造は, $S^2 \times S^1$ 上の $S^2 \times \{pt\}$ を葉とする積葉層構造を除き, 常に正および負の接触構造で C^0-近似出来ることを示した. 彼らは更に, 近似よりも強い条件として, 線型変形とよばれる概念を考えた. これは平面場の族 $\{\xi_t\}$ で, $t = 0$ のとき葉層構造, $t > 0$ のとき正の接触構造, $t < 0$ のとき負の接触構造を定めるようなものである.

一方, 三松佳彦氏は彼らに先立って, アノソフ葉層の線型変形を研究していた. 良く知られているように, アノソフ流の安定及び不安定葉層は, 互いを定める1形式によって正と負の接触構造に線型変形される. このような接触構造の組は双接触構造と呼ばれる. しかしながら, このような双接触構造は必ずしもアノソフ流から付随して得られるとは限らない. 三松佳彦氏はアノソフ流の概念を拡張して得られる射影的アノソフ流を定義した. 射影的アノソフ流には常に双接触構造が付随し, 逆に双接触構造があれば必ずその双方にルジャンドリアンな射影的アノソフ流が存在する.

実 3 次元多様体の場合と異なり, 複素 3 次元多様体においては, アノソフ性は必ずしも正則接触構造の存在を保証しない. Étienne Ghys 氏が定義した正則アノソフ流や, それを一般化した正則射影的アノソフ流のなかに, それをルジャンドル流として持つような正則接触構造を許容しない物が多数あることを, 筆者は修士論文において示した.

複素 3 次元多様体における接触構造と葉層構造の変形を考えよう. 正則平面場の正則な族 $\{\xi_t\}(t \in U \subset \mathbb{C})$ であり, 有限個の t を除けば $\{\xi_t\}$ は正則接触構造を定めるようなものを考える. 特に, ξ_0 は接触構造であるとする. このとき, 多様体の各点 p の近傍において, ξ_0 にルジャンドリアンなベクトル場 $\widetilde{X}$ を次のように定める; $\widetilde{X}$ の定める $\mathbb{C}$ 作用 ϕ^s による ξ_0 の push-forward を ξ^s とするとき, $\frac{\partial}{\partial t}(\xi_t|_p)|_{t=0}$ と $\frac{\partial}{\partial s}(\xi^s|_p)|_{s=0}$ が一致する. $\widetilde{X}$ の取り方には自由度があるが, 点 p におけるベクトル $\widetilde{X}_p$ はこれによって一意に定まる. これらの各点 p でベクトル $\widetilde{X}_p$ を対応させるベクトル場を X で表す. このとき X は多様体上の正則なベクトル場で ξ_0 にルジャンドリアンであり, この対応により, X は正則接触構造 ξ_0 の正則な変形の 1-jet を表すことが分かる. 本論文では, $\frac{\partial}{\partial t}(\xi_t|_p)|_{t=0}$ が至る所消えない場合, つまりルジャンドリアンなベクトル場 X が至るところ 0 にならない場合を扱う.

さて, 実 3 次元上の C^r という条件と異なり, 複素 3 次元上の正則的という条件は非常に厳しいため, そのような構造を許容する多様体は限られると考えられる. 本論文において, 筆者はまず, 次のような定理を示した.

定理 (M, ξ) は複素 3 次元接触多様体で, X は ξ にルジャンドリアンな非特異ベクトル場であるとする. このとき, 次のいずれかが成立する.
(i) **(parabolic)**
M の座標近傍近傍系 $\mathcal{U} = \{U = \{(x, y, z)\}\}$ が存在して, 各座標近傍 U 上で, ξ と X が $\xi = \ker(dy - xdz)$ および $X = \partial/\partial x$ によって与えられる.
(ii) **(loxodromic)**
M の座標近傍近傍系 $\mathcal{U} = \{U = \{(x, y, z)\}\}$ が存在して, 各座標近傍 U 上で, ξ と X が $\xi = \ker(dy - \exp(ax)dz)$ および $X = \partial/\partial x$ によって与えられる.

ルジャンドリアンなベクトル場が loxodromic であるならば, そのベクトル場は正則射影的アノソフ流を定め, 逆に, 正則射影的アノソフ流が接触構造を許容するならば, それに対応するベクトル場は接触構造に対して loxodromic である.

ルジャンドリアンなベクトル場を持つ接触構造の最も典型的な例は非可換な 3 次元リー群の等質空間上の接触構造である. 多様体上に非可換な二つの非特異なベクトル場 X, Z があれば, $\mathbb{C}X \oplus \mathbb{C}Z$ は接触構造を定め, $aX + bZ$ はその接触構造にルジャンドリアンなベクトル場である. このとき $Y = [X, Z]$ とすれば Y もまた非特異なベクトル場となるので,

元の多様体は等質空間であることが分かる. この場合, 接触構造を定める正則な 1 形式を $\omega(X)=\omega(Z)=0,\ \omega(Y)=1$ で定めることが出来る.

本論文では逆に, ルジャンドリアンなベクトル場を許容する接触多様体で, 接触構造を定める正則な 1 形式が存在しないもの, つまり, 3 次元リー群の等質空間ではない例を構成した.

次に, 接触構造を定める 1 形式 ω が存在する場合は, ルジャンドリアンなベクトル場 X が存在すれば元の多様体は等質空間であるか, という問題が考えられる. 接触形式 ω のレーブベクトル場を Y としたときに $[X,Y]$ について次のような条件で場合分けが出来る.

命題 次の 3 つの条件のうちいずれかが成立する;
(i) $[X,Y]$ が $\mathbb{C}X\oplus\mathbb{C}Y$ と横断的.
(ii) 0 でない定数 c が存在して $[X,Y]=cX$.
(iii) $[X,Y]=0$.

(i) のときには自動的に, (ii) のときにはÉtienne Ghys 氏と Alberto Verjovsky 氏の結果を使うことにより, 問題は肯定的に解決される. 一方, (iii) のときには問題は未解決であるが, この論文では次のように局所的, および大域的構造を得た.

定理 M の座標近傍近傍系 $\mathcal{U}=\{U=\{(x,y,z)\}\}$ が存在して, 各座標近傍 U 上で, ω と X が $\omega=\ker dy-xdz$ および $X=\partial/\partial x$ によって与えられる. M の普遍被覆は $\mathbb{C}$ 上の $\mathbb{C}^2$-バンドルであり, 各ファイバー $\mathbb{C}^2$ の接空間は $\mathbb{C}X\oplus\mathbb{C}Y$ に一致する.

また, 特に M の普遍被覆が $\mathbb{C}^3$ で, $\omega=\ker dy-xdz$ および $X=\partial/\partial x$ のときを考察した. まず, $(\mathbb{C},\omega,X)$ の自己同型群は

$$\mathrm{Aut}(\mathbb{C}^3,\omega,X)=\{(f,C)\mid f\in\mathcal{O}(\mathbb{C}),\ C\in\mathbb{C}\},$$
$$(f,C)\colon (x,y,z)\mapsto(x+f'(z),y+f(z),z+C).$$

で与えられることを示した. この条件の下での M の分類は $\Gamma\backslash\mathbb{C}^3$ が 3 次元閉多様体になるような $\mathrm{Aut}(\mathbb{C}^3,\omega,X)$ の部分群 Γ の分類と対応する. そのような部分群 Γ に対して, 次の定理を示した.

定理 Γ が $\mathrm{Aut}(\mathbb{C}^3,\omega,X)$ の部分群で $\Gamma\backslash\mathbb{C}^3$ が 3 次元閉多様体になるようなとき, うまく元 σ をとれば, 任意の $(f,C)\in\sigma^{-1}\Gamma\sigma$ について f は $r(z)\exp(\alpha z)$ ($r(z)$ は 4 次以下の多項式, α は定数) の形の式の, 高々16 個の線形結合と定数の和で表される.