論文審査の結果の要旨

氏名 小林 真一

小林君は本論文において, 有理数体上の楕円曲線 E が超特異還元をもつような素数 p での岩澤理論を研究した. 岩澤理論では, Selmer 群が基本的対象だが, 超特異還元をもつような素数については, Selmer 群がねじれ加群でないため, p 進 L 関数と関係させる形で岩澤主予想を定式化することでさえ, すでに困難な問題だった. 小林君は Selmer 群の定義を修正することにより, ねじれ加群となる Selmer 群を定義し, この新しい Selmer 群を使って, Pollack が定義していた p 進 L 関数との関係に関する岩澤主予想を定式化した. さらに加藤が定義していた zeta 元を使って, この主予想の"半分"を証明した. つまり通常還元をもつ素数での岩澤理論と並行する形に, 超特異還元をもつ素数 p での岩澤理論を展開することができることを示したのである.

E を有理数体 $\mathbb{Q}$ 上の楕円曲線とし, p を E が超特異還元をもつような素数とする. さらに $E \bmod p$ の $\mathbb{F}_p$ 有理点の個数が $p+1$ であると仮定する. この仮定は p が 5 以上ならばいつも満たされる. $E(\mathbb{Q}_p(\zeta_{p^n}))$ の部分群 $E^+(\mathbb{Q}_p(\zeta_{p^n})), E^-(\mathbb{Q}_p(\zeta_{p^n}))$ を

$$
\begin{aligned}
&E^\pm(\mathbb{Q}_p(\zeta_{p^n}))\\
=&\{P \in E(\mathbb{Q}_p(\zeta_{p^n})) | m \le n, (-1)^m = \pm 1 \text{ なら } \mathrm{Tr}_{n/m} P \in E(\mathbb{Q}_p(\zeta_{p^{m-1}}))\}.
\end{aligned}
$$

で定義する. ここで $\mathrm{Tr}_{n/m}$ は $\mathrm{Tr}_{\mathbb{Q}_p(\zeta_{p^n})/\mathbb{Q}_p(\zeta_{p^m})}$ を表わす. Selmer 群

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{Sel}(E/\mathbb{Q}(\zeta_{p^n}))\\
=&\mathrm{Ker}\left(H^1(\mathbb{Q}(\zeta_{p^n}), E[p^\infty]) \to \prod_{v \nmid p} H^1(\mathbb{Q}(\zeta_{p^n})_v, E[p^\infty]) \times \frac{H^1(\mathbb{Q}_p(\zeta_{p^n}), E[p^\infty])}{E(\mathbb{Q}_p(\zeta_{p^n})) \otimes \mathbb{Q}/\mathbb{Z}} \right)
\end{aligned}
$$

の部分群 $\mathrm{Sel}^+(E/\mathbb{Q}(\zeta_{p^n})), \mathrm{Sel}^-(E/\mathbb{Q}(\zeta_{p^n}))$ を, 上の式の $E(\mathbb{Q}_p(\zeta_{p^n}))$ を $E^\pm(\mathbb{Q}_p(\zeta_{p^n}))$ で置き換えることにより定義する. Selmer 群 $\mathrm{Sel}(E/\mathbb{Q}(\zeta_{p^n})), \mathrm{Sel}^\pm(E/\mathbb{Q}(\zeta_{p^n}))$ の制限写像に関する順極限をそれぞれ $\mathrm{Sel}(E/\mathbb{Q}(\zeta_{p^\infty})), \mathrm{Sel}^\pm(E/\mathbb{Q}(\zeta_{p^\infty}))$ とおく. Pontryagin 双対 $\mathrm{Sel}(E/\mathbb{Q}(\zeta_{p^\infty}))^\vee = Hom(\mathrm{Sel}(E/\mathbb{Q}(\zeta_{p^\infty})), \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p)$ は, 完備群環 $\mathbb{Z}_p[[\mathbb{Z}_p^\times]]$ 上の加群として, 有限生成で階数 1 であるが, $\mathrm{Sel}^\pm(E/\mathbb{Q}(\zeta_{p^\infty}))^\vee$ については次が成り立つ.

定理 **1.** 偶奇 Selmer 群の Pontragin 双対 $\mathrm{Sel}^\pm(E/\mathbb{Q}(\zeta_{p^\infty}))^\vee$ は, $\mathbb{Z}_p[[\mathbb{Z}_p^\times]]$ 加群として有限生成ねじれ加群である.

定理 1 により, $\mathrm{Sel}^\pm(E/\mathbb{Q}(\zeta_{p^\infty}))^\vee$ の特性イデアル $\mathrm{Char}\ \mathrm{Sel}^\pm(E/\mathbb{Q}(\zeta_{p^\infty}))^\vee$ が岩澤環 $\mathbb{Z}_p[[\mathbb{Z}_p^\times]]$ のイデアルとして定義される. このイデアルについて, 次のように岩澤主予想を定式化できる. $\mathcal{L}_p^\pm(E, X) \in \mathbb{Z}_p[[\mathbb{Z}_p^\times]]$ を Pollack によって定義された p 進 L 関数とする. $\alpha = \pm\sqrt{-p}$ を $X^2 + a_p X + p = X^2 + p = 0$ の根とし, $\mathcal{L}_p(E, \alpha, X)$ を, E の Hasse-Weil$L$ 関数の特殊値を p 進補間してえられる p 進 L 関数とする. これは岩澤環 $\mathbb{Z}_p[[\mathbb{Z}_p^\times]]$ には属さないが, Pollack の p 進 L 関数によって

$$
\mathcal{L}_p(E, \alpha, X) = \mathcal{L}_p^+(E, X)\Phi^+(X) + \alpha\mathcal{L}_p^-(E, X)\Phi^-(X)
$$

と表わされる．ここで $\Phi^{\pm}(X) \in \mathbb{Q}_p[[X]]$ は円分多項式を使って定義される簡単な巾級数である．

予想 **2.** Selmer 群 $\mathrm{Sel}^{\pm}(E/\mathbb{Q}(\zeta_{p^\infty}))$ の双対の特性イデアル Char $\mathrm{Sel}^{\pm}(E/\mathbb{Q}(\zeta_{p^\infty}))^\vee$ は, Pollack の p 進 L 関数 $\mathcal{L}_p^{\pm}(E,X)$ で生成される．

この岩澤主予想について，さらに次の定理を証明した．

定理 **3.** 整数 n を十分大きくとれば，特性イデアル Char $\mathrm{Sel}^{\pm}(E/\mathbb{Q}(\zeta_{p^\infty}))^\vee$ は, $p^n\mathcal{L}_p^{\pm}(E,X)$ を含む．さらに E が虚数乗法をもたなければ，ほとんどすべての素数 p に対し, $n=0$ とできる．

定理の証明は次のようにしてなされる．まず E の有理点 $c_n \in E(\mathbb{Q}_p(\zeta_{p^n}))$ の系で, $\mathrm{Tr}_{n/n-1}(c_n) = c_{n-2}$ をみたすものを，ある標準的なしかたで定義する．さらにこの系を使って Perrin-Riou 写像

$$P^{\pm} : \mathbf{H}^1_{\mathrm{Iw}}(T) = \varprojlim_n H^1(\mathbb{Q}_p(\zeta_{p^n}), T) \to \mathbb{Z}_p[[\mathbb{Z}_p^\times]] = \varprojlim_n \mathbb{Z}_p[\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}_p(\zeta_{p^n})/\mathbb{Q}_p)]$$

を定義する．逆極限は余制限写像に関してとる．この写像について次がなりたつ．

命題 **4.** 1. 写像 $P^{\pm} : \mathbf{H}^1_{\mathrm{Iw}}(T) \to \mathbb{Z}_p[[\mathbb{Z}_p^\times]]$ の核は, $E^{\pm}(\mathbb{Q}_p(\zeta_{p^n})) \otimes \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p \subset H^1(\mathbb{Q}_p(\zeta_{p^n}), T \otimes \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p)$ の Tate ペアリングに関する零化域 $H^1(\mathbb{Q}_p(\zeta_{p^n}), T)^{\pm} \subset H^1(\mathbb{Q}_p(\zeta_{p^n}), T)$ の逆極限 $\mathbf{H}^1_{\mathrm{Iw},\pm}(T)$ と等しい．

2. $P^- : \mathbf{H}^1_{\mathrm{Iw}}(T) \to \mathbb{Z}_p[[\mathbb{Z}_p^\times]]$ は全射であり, $P^+ : \mathbf{H}^1_{\mathrm{Iw}}(T) \to \mathbb{Z}_p[[\mathbb{Z}_p^\times]]$ の像は，全射 $\mathbb{Z}_p[[\mathbb{Z}_p^\times]] \to \mathbb{Z}_p[\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}_p(\zeta_p)/\mathbb{Q}_p)]$ による単位指標成分 $\mathbb{Z}_p e_1 \subset \mathbb{Z}_p[\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}_p(\zeta_p)/\mathbb{Q}_p)]$ の逆像と等しい．

加藤は E の Tate 加群 $T = T_pE$ が定める層のエタール・コホモロジーの逆極限 $\mathbf{H}^1(T) = \varprojlim_n H^q(\mathrm{Spec}\mathbb{Z}[\zeta_{p^n}, \frac{1}{p}], j_*T)$ の中に zeta 元 $\mathbf{z}^{\pm} \in \mathbf{H}^1(T)$ を定義した．この元と，上の Perrin-Riou 写像について次がなりたつ．

命題 **5.** 加藤の zeta 元 $\mathbf{z}^{\pm} \in \mathbf{H}^1(T)$ の $\mathbf{H}^1_{\mathrm{Iw}}(T)$ での像の, Perrin-Riou 写像 $P^{\pm} : \mathbf{H}^1(T) \to \mathbb{Z}_p[[\mathbb{Z}_p^\times]]$ による像は, Pollack の p 進 L 関数 $\mathcal{L}_p^{\pm}(E,X)$ と $-1 \in \mathbb{Z}_p^\times \subset \mathbb{Z}_p[[\mathbb{Z}_p^\times]]$ の積と等しい．

定理 1 は命題 4,5 と完全系列

$$0 \to \mathbf{H}^1(T) \to \mathbf{H}^1_{\mathrm{Iw}}(T)/\mathbf{H}^1_{\mathrm{Iw},\pm}(T) \to \mathrm{Sel}^{\pm}(E/\mathbb{Q}(\zeta_{p^\infty}))^\vee \to \mathrm{Sel}_0(E/\mathbb{Q}(\zeta_{p^\infty}))^\vee \to 0$$

および，

$$\mathrm{Sel}_0(E/\mathbb{Q}(\zeta_{p^\infty})) = \varinjlim_n \mathrm{Ker}\left(H^1(\mathbb{Q}(\zeta_{p^n}), E[p^\infty]) \to \prod_v H^1(\mathbb{Q}(\zeta_{p^n})_v, E[p^\infty])\right)$$

の双対 $\mathrm{Sel}_0(E/\mathbb{Q}(\zeta_{p^\infty}))^\vee$ が有限生成ねじれ $\mathbb{Z}_p[[\mathbb{Z}_p^\times]]$ 加群であることから従う．定理 2 は，さらに加藤によって $\mathrm{Char}(\mathbf{H}^1(T)/\mathbb{Z}_p[[\mathbb{Z}_p^\times]]\mathbf{z}^{\pm}) \subset \mathrm{Char}\ \mathrm{Sel}_0(E/\mathbb{Q}(\zeta_{p^\infty}))^\vee$ が示されていることから従う．

この論文の内容は，栗原, Perrin-Riou, Pollack らによる超特異還元をもつ楕円曲線の岩澤理論の研究を踏まえ，さらにそれを発展させる優れた業績である．よって論文提出者 小林 真一 は博士 (数理科学) の学位を受けるにふさわしい充分な資格があると認める．