論文の内容の要旨

論文題目 Geometry of gerbes in Chern-Simons theory (Chern-Simons理論における gerbe の幾何)

氏名　五味　清紀

境界をもつ3次元多様体 M 上の主 $SU(2)$ 束 P が与えられたとき、P 上の接続に対する Chern-Simons 汎関数の値はある境界条件に依る。その依存性は、閉じた2次元多様体上の主 $SU(2)$ 束 $\partial P \to \partial M$ の接続の空間の上に定義される複素直線束（Chern-Simons 直線束）を用いると、自然に記述することができる。これらは「対称性と局所性」と呼ばれる基本的な性質を満たし [3]、Chern-Simons 理論が（2＋1）次元の位相的量子場の理論を与える一つの理由となっている。

境界を持つ2次元多様体上の主 $SU(2)$ 束に付随する Chern-Simons 直線束を定義するためには、ある種の境界条件が必要である [3]。それを自然に記述するものとして、閉じた1次元多様体上の主 $SU(2)$ 束には、gerbe とよばれる幾何学的な対象物が付随するということが、一般的な視点から Freed [4] により示唆されている。特に、構造群が有限群である場合には、閉じた1次元多様体に付随する gerbe は既に Brylinski-McLaughlin [2] や Freed [4] により調べられており、「量子化」を行うことで Verlinde algebra が得られることが知られている。

本論文の目標は、閉じた1次元多様体上の主 $SU(2)$ 束の接続の空間上に gerbe を定式化し、その幾何を調べることである。ここで gerbe とは、Dixmier-Douary gerbe [1, 2] と呼ばれるものを指している。ある多様体上の Dixmier-Douary gerbe はある種の圏の層として定式化される。その同型類は3次の整係数コホモロジー群で分類され、複素直線束の高次のアナロジーであるととらえることができる。Gerbe の幾何は、Brylinski [1] により深く研究されて

おり、接続や曲率、道に沿う平行移動、群作用による同変 gerbe の概念などが定式化されている。

閉じた 1 次元多様体上の $SU(2)$ 束の接続の空間上の Dixmier-Douad gerbe を定義するために、lifting gerbe について簡単に説明する。Γ をあるリー群とし、$\widehat{\Gamma}$ を Γ の $\mathbb{T} := \{z \in \mathbb{C} | \ |z| = 1\}$ によるある中心拡大とする。また、P をある多様体 X 上の主 Γ 束とする。このとき、X の勝手な開集合 U に対し、U 上の主 $\widehat{\Gamma}$ 束 $\widehat{P}$ であって、P の U への制限 $P|_U$ の構造群の $\widehat{\Gamma}$ への持ち上げになっているもの全体のなす圏を $\underline{\mathcal{C}}(U)$ と置く。この対応づけ $U \mapsto \underline{\mathcal{C}}(U)$ が定義する圏の層は X 上の Dixmier-Douady gerbe になっており、P と $\widehat{\Gamma}$ に付随する lifting gerbe と呼ばれる。

さて、境界のない向きづけられたコンパクト 1 次元多様体 S 上の主 $SU(2)$ 束 R 上の接続の空間を $\mathcal{A}_R$ と書く。S から $SU(2)$ への写像全体 G_S は群をなし、ループ群と呼ばれる。任意の整数 k に対して、G_S には $\mathbb{T}$ による非自明な中心拡大 $\widehat{G}_S$ があり、これは Kac-Moody Lie 群と呼ばれる。R の断面の空間を $\mathcal{S}_R$ と書く。直積空間 $\mathcal{P}_R := \mathcal{A}_R \times \mathcal{S}_R$ に、G_S を $\mathcal{S}_R$ にのみ作用させると、$\mathcal{A}_R$ 上の（自明な）主 G_S 束が定義される。

定義 1. $\mathcal{A}_R$ 上の Dixmier-Douady gerbe $\underline{\mathcal{C}}_R$ を、$\mathcal{P}_R$ と $\widehat{G}_S$ に付随する lifting gerbe として定義し、Chern-Simons gerbe (CS gerbe) と呼ぶ。

ここで、主 $SU(2)$ 束 $R \to S$ が、向きづけられたコンパクト 2 次元多様体 Σ 上の主 $SU(2)$ 束 $Q \to \Sigma$ を境界に制限することで得られているとする。このとき、Q 上の接続の空間 $\mathcal{A}_Q$ から $\mathcal{A}_R$ への写像 $r : \mathcal{A}_Q \to \mathcal{A}_R$ が自然に得られる。この写像による CS gerbe の引き戻し $r^*\underline{\mathcal{C}}_R$ は、主 G_S 束 $\mathcal{P}_R$ の引き戻し $r^*\mathcal{P}_R$ と $\widehat{G}_S$ に付随した lifting gerbe と自然に同型であることが示せる。従って、$r^*\underline{\mathcal{C}}_R$ の大域的な対象は、主 G_S 束 $r^*\mathcal{P}_R$ の構造群の $\widehat{G}_S$ への持ち上げである。そのような持ち上げの一つ $\widehat{\mathcal{P}}_Q$ が、Wess-Zumino 項を使うことで構成することができる。この持ち上げは、引き戻し $r^*\mathcal{P}_R = \mathcal{A}_Q \times \mathcal{S}_R$ 上の主 $\mathbb{T}$ 束を与える。構成方法より、その主 $\mathbb{T}$ 束が導く複素直線束は、Freed [3] が定義した $Q \to \Sigma$ に付随する Chern-Simons 直線束に一致する。この記述が、2 次元多様体が境界を持つ場合の Chern-Simons 直線束の gerbe を用いた記述である。

CS gerbe は lifting gerbe として構成されていた。そこで、本論文では、一般の lifting gerbe の幾何を詳しく調べ、その結果を適用するという方法で、CS gerbe の幾何を調べた。接続の空間 $\mathcal{A}_R$ が可縮なので CS gerbe $\underline{\mathcal{C}}_R$ は位相的には自明である。しかしながら、その幾何はいくつもの非自明な内容を含むことがわかる。

まず、CS gerbe は次の基本的な性質を持つ。

定理 1. *(Functoriality)* $f : R' \to R$ を、向きづけられた境界のない 1 次元多様体の間の可微分同相写像 $\bar{f} : S' \to S$ を覆うような、主 $SU(2)$ 束の写像と

し、$\phi_f : \mathcal{A}_R \to \mathcal{A}_{R'}$ を、f による引き戻しが導く写像とする。このとき自然な同型写像 $\Phi_f : \underline{\mathcal{C}}_R \to \phi_f^* \underline{\mathcal{C}}_{R'}$ が存在する。

(Orientation) 主 $SU(2)$ 束 $R \to S$ が導く、S の向きを逆にした多様体 $-S$ 上の主 $SU(2)$ 束を $-R \to -S$ と書く。このとき自然な同型写像 $\underline{\mathcal{C}}_{-R} \cong \underline{\mathcal{C}}_R^*$ が存在する。ただし、$\underline{\mathcal{C}}_R^*$ は $\underline{\mathcal{C}}_R$ の *gerbe* としての逆 *(inverse)* を表す。

(Additivity) 閉じた 1 次元多様体 S_1, S_2 上にそれぞれ主 $SU(2)$ 束 R_1, R_2 があったする。このとき自然な同型写像 $\underline{\mathcal{C}}_{R_1 \sqcup R_2} \cong \underline{\mathcal{C}}_{R_1} \boxtimes \underline{\mathcal{C}}_{R_2}$ が存在する。ただし $\boxtimes$ は *gerbe* の外部積 *(external product)* を表す。

(Gluing) 閉じた 1 次元多様体 S の、コンパクト 2 次元多様体 Σ への埋め込み $j : S \to \Sigma$ が与えられたとき、Σ を S に沿って切り開いて得られる 2 次元多様体を Σ_c で表す。主 $SU(2)$ 束 Q が Σ 上に与えられているとき、Σ_c 上に導かれた主 $SU(2)$ 束を Q_c によって表し、対応して得られる接続の空間上の写像を $r : \mathcal{A}_Q \to \mathcal{A}_{\partial Q}$, $r_c : \mathcal{A}_{Q_c} \to \mathcal{A}_{\partial Q_c}$, $c : \mathcal{A}_Q \to \mathcal{A}_{Q_c}$ によって表す。このとき、自然な同型写像 $\mathrm{Tr} : c^* r_c^* \underline{\mathcal{C}}_{\partial Q_c} \to r^* \underline{\mathcal{C}}_{\partial Q}$ による持ち上げの像 $\mathrm{Tr}(c^* \widehat{\mathcal{P}}_{Q_c})$ と $\widehat{\mathcal{P}}_Q$ の間には自然な同型が存在する。

特に、(Gluing) において Σ が境界を持たない場合を考えると、持ち上げ $\widehat{\mathcal{P}}_{Q_c}$ から Chern-Simons 直線束が得られることがわかる。

定理 1 に本質的なのは、ループ群の中心拡大と Wess-Zumino 項が持つ基本的な性質 [3] である。それらの性質を lifting gerbe に対する操作についての結果と組み合わせることにより、上の定理が証明される。

Dixmier-Douady gerbe に対し、接続にあたるものは connective structure と curving と呼ばれるものであり、曲率にあたるものは 3-curvature と呼ばれる 3 次微分形式である。

定理 2. *Chern-Simons gerbe* は自然な *connective structure* と *curving* を持ち、その *3-curvature* は恒等的に *0* である。

一般に、主 Γ 束 P と Γ の中心拡大 $\widehat{\Gamma}$ に付随した lifting gerbe の connective structure と curving は、P の接続と splitting と呼ばれるものから構成できる。特に、P の接続が平坦であれば、lifting gerbe の 3-curvature が消える。従って、主束 $\mathcal{P}_R \to \mathcal{A}_R$ 上に自然な平坦接続と splitting を与えることにより、定理 2 を示すことができる。

Connective structure が与えられた Dixmier-Douady gerbe には、道に沿った平行移動の概念がある。これらは gerbe の fiber として得られる圏の間の同値として定義される。すなわち、道 $a : [0,1] \to \mathcal{A}_R$ に沿う CS gerbe $\underline{\mathcal{C}}_R$ の平行移動とは圏の同値 $\mathbb{P}\mathrm{T}_a : \underline{\mathcal{C}}(a(0)) \to \underline{\mathcal{C}}(a(1))$ である。一方で、定理 1 を使うことにより、円筒上の主束 $R \times I$ に付随する持ち上げ $\widehat{\mathcal{P}}_{R \times I}$ と、道 a が $R \times I$ 上に与える接続とから、別の圏の同値 $\mathbb{P}\mathrm{T}''_a : \underline{\mathcal{C}}(a(0)) \to \underline{\mathcal{C}}(a(1))$ が得られる。

定理 3. 圏の同値 $\mathbb{P}\mathrm{T}_a$ と $\mathbb{P}\mathrm{T}''$ の間には自然な同値が存在する。

主束 $\widehat{\mathcal{P}}_R$ の接続が定める平行移動 $PT_a : \widehat{\mathcal{P}}_R|_{a(0)} \to \widehat{\mathcal{P}}_R|_{a(1)}$ は、さらに別の圏の同値 $\mathbb{P}\mathrm{T}'_a : \underline{\mathcal{C}}(a(0)) \to \underline{\mathcal{C}}(a(1))$ を定める。これを補助的に使うことで、定理 3 が示される。

ある多様体に群作用があるときには、同変 gerbe というものを考えることができる。CS gerbe は接続の空間 $\mathcal{A}_R$ 上に定義されていた。ここでは特に、$\mathcal{A}_R$ に作用する群としてゲージ変換群 $\mathcal{G}_R$ を考える。

定理 4. *Chern-Simons gerbe* $\underline{\mathcal{C}}_R$ は、$\mathcal{G}_R$ 同変 *gerbe* である。

接続の空間 $\mathcal{A}_R$ への $\mathcal{G}_R$ の作用は、自然な方法で $\mathcal{P}_R$ に持ち上がる。これが、定理 4 の証明のポイントである。

$\mathcal{G}_R$ 同変な gerbe として $\underline{\mathcal{C}}_R$ が自明なときに消えている量を、同変コホモロジー群 $H^3_{\mathcal{G}_R}(\mathcal{A}_R;\mathbb{Z})$ のコホモロジー類 $\lambda_{\mathcal{G}_R}(\mathcal{A}_R, \widehat{G}_S)$ として与えることができる。閉じた 1 次元多様体として S^1 を考えるとき、簡単な計算により、$H^3_{\mathcal{G}_R}(\mathcal{A}_R) \cong H^3(LBSU(2)) \cong H^4(BSU(2)) \cong \mathbb{Z}$ であることがわかる。CS gerbe に対応する同変コホモロジー類の計算結果は次の通りである。

定理 5. $S = S^1$ のとき、$H^3_{\mathcal{G}_R}(\mathcal{A}_R;\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$ という同型のもとで、同変コホモロジー類 $\lambda_{\mathcal{G}_R}(\widehat{\mathcal{P}}_R, \widehat{G}_S)$ は、$\widehat{G}_S$ を定めるときに与えた整数 k に対応する。

この定理より、k が 0 でなければ、Chern-Simons gerbe は $\mathcal{G}_R$ 同変 gerbe として非自明であることが結論できる。

謝辞. 本論文を書くにあたり、数多くの有益な助言と暖かい励ましを下さった、指導教官の河野俊丈先生に、深く感謝致します。

参考文献

[1] J-L. Brylinski, *Loop spaces, Characteristic Classes and Geometric Quantization*, Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, 1993.

[2] J-L. Brylinski and D. A. McLaughlin, *The geometry of degree-4 characteristic classes and of line bundles on loop spaces. II*, Duke Math. J. 83 (1996), no. 1, 105–139.

[3] D. S. Freed, *Classical Chern-Simons Theory. I*, Adv. Math. 113(1995), no.2, 237–303.

[4] D. S. Freed, *Higher algebraic structures and quantization*, Comm. Math. Phys. 159 (1994), no.2, 343–398.