論文の内容の要旨

論文題目

Fano threefolds with Picard number 2
in positive characteristic
（ピカール数２の正標数ファノ３次元多様体について）

氏名　　　　　　　　　　　　　　　　齋藤　夏雄

3 次元の多様体を分類するうえで中心的な役割を果たしている森プログラムと呼ばれる理論により，Fano 多様体は代数幾何学における重要な研究対象となってきている．複素数体上において滑らかな 3 次元 Fano 多様体を分類する試みは Iskovskih [Isk77, Isk78] によってその先鞭がつけられ，Shokurov [Sho79]，藤田 [Fuj90]，森－向井 [MM81, MM83, MM86]，竹内 [Tak89] などの仕事によって完成した．一方，定義体の標数が正の場合には小平の消滅定理や Bertini の定理など基本的な定理が成り立たないため，こうした分類をそのまま正標数に持ち込むことはできなかった．しかし Shepherd-Barron [SB97] は最近こうした困難をうまく解決し，Picard 数 1 の Fano 多様体について，双有理的な分類を与えることに成功した．また Megyesi [Meg98] は Fano 指数 が 2 以上の Fano 多様体について調べ，標数 0 のときと同様に分類されることを示した．

このような流れをふまえ，本論文では正標数の体上において Picard 数 2 の Fano 多様体について考察した．Kollár により，森プログラムで基本的な役割を果たす端射線の収縮写像の分類は，任意の標数に拡張できることが知られており，これを用いて収縮写像のタイプごとに Fano 多様体を調べていく．正標数で考えるときに問題となるのは，Bertini の定理が成り立たないことに起因する病理的な現象であり，その 1 つが wild conic bundle の存在である．

定義. $f : X \to S$ を滑らかな 3 次元多様体から 2 次元の滑らかな射影曲面への全射とする．S の各点 s に対し，$f^{-1}(s)$ が二重直線であるとき，$f : X \to S$ を wild conic bundle という．

当然ながら，このような特異な現象は標数 2 のときにのみ起こり得る．

また Bertini の定理が成立しないために，与えられた Fano 多様体が (D) 型の収縮写像を持つとき，その一般ファイバーが滑らかでない可能性がある．これについても，どのような場合にそのような現象が起こり得るかということは，興味深い問題である．

本論文では以上の問題に対し，次のような結果を得た：

定理. X を $\rho(X) = 2$ の 3 次元 Fano 多様体とする．このとき，以下のことが成り立つ：

(i) X は 36 のクラスに分類される．これは標数 2 においていくつか注意すべき点があることを除けば，森－向井による分類と同じである．

(ii) X が wild conic bundle の構造を持っているとする．このとき，X は $\mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^2$ において bidegree $(1,2)$ の因子として与えられるものに限る．また，このような例は実際に存在する．

(iii) X が del Pezzo surface をファイバーとするファイブレーションを持っているとする．このとき，一般ファイバーは正規である．

(iv) X が del Pezzo ファイブレーションを持ち，その一般ファイバーが $\mathbb{P}^3$ 内の 2 次の cone であるとする．このとき，X は $\mathbb{P}^4$ 内の 2 次超曲面をその中の 2 次曲線でブローアップしたものとして得られるものに限る．

(i) の証明は，竹内 [Tak89] の方法に倣い，反標準因子を数値的な議論によって決定することで行う．例えば，X を Picard 数 2 の Fano 多様体とし，2つの収縮写像がそれぞれ (C1) と (D1) のタイプであったとする．2つの写像を f, g とする：

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[dl, "f"'] \arrow[dr, "g"] & \\ \mathbb{P}^2 & & \mathbb{P}^1. \end{tikzcd}$$

$\mathbb{P}^2$ 上の直線の引き戻しを $H := f^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(1)$ とし，$\mathbb{P}^1$ の 1 点の引き戻しを $S := g^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(1)$ とする．H と S は明らかに独立である．したがって，Picard 数が 2 であるから，適当な $x, y \in \mathbb{Q}$ を用いて

$$H \equiv x(-K_X) - yS$$

と表せることが分かる．S は del Pezzo surface でその次数を d とすると，H と S に関する交点数が

$$H^3 = 0,\ (-K_X).H^2 = 2,\ S^3 = (-K_X).S^2 = 0,\ (-K_X)^2.S = d$$

と計算できる．これより x, y, d の値が一意に定まり，X は $\mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^1$ の二重被覆で，$(-K_X)^3 = 6$ かつ $-K_X \equiv H + S$ を満たすことが分かる．このようにして，他の収縮写像の組み合わせに対しても同様にしてクラスを一意に決定することができる．

(ii)-(iv) についても，各クラスに対してそれぞれ wild conic bundle や 非正規 del Pezzo ファイブレーションなどを持っていると仮定して矛盾を導く．証明の方法はそのクラスごとに異なる．例えば上で述べた，収縮写像のペアが (C1)-(D1) であるときのように X が別のある多様体の二重被覆になっているような場合を考えると，もし X が wild conic bundle の構造を持つならば，この被覆は純非分離的でなければならない．一般に標数 2 における純非分離的な二重被覆 $h: X \to Y$ に対し，ある Y 上の可逆層 $\mathscr{L}$ を用いて

$$\omega_X \cong h^*(\omega_Y \otimes \mathscr{L})$$

と書け，層 $\mathscr{L}^{\otimes 2} \otimes \Omega^1_Y$ のある切断の零点の逆像が X の特異点を与えることが分かっている．そこで $c_3(\mathscr{L}^{\otimes 2} \otimes \Omega^1_Y)$ を計算してみるとこれが 0 でないことが分かり，したがって X が特異点を持ってしまうことが得られる．ある基本的な多様体の二重被覆として X が与えられる場合は，すべてこのようにして wild conic bundle の可能性を排除することができる．

また，(iv) の系として，Picard 数 3 の Fano 多様体で，$\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ 上に wild conic bundle の構造を持つものを構成することにも成功した．

謝辞．本論文を書くに当たっては，桂利行先生にいろいろとお世話になりました．暖かく励ましつづけてくださったことに深く感謝致します．また高木寛通氏，廣門正行氏には有益なコメントを数多くいただきました．深く感謝致します．

参考文献

[Fuj90] T. Fujita, *Classification theories of polarized varieties*, Cambridge University Press, Cambridge, 1990.

[Isk77] V. A. Iskovskih, *Fano threefolds. I*, Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat. **41** (1977), no. 3, 516–562.

[Isk78] V. A. Iskovskih, *Fano threefolds. II*, Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat. **42** (1978), no. 3, 506–549.

[Meg98] G. Megyesi, *Fano threefolds in positive characteristic*, J. Algebraic Geom. **7** (1998), no. 2, 207–218.

[MM81] S. Mori and S. Mukai, *Classification of Fano 3-folds with $B_2 \geq 2$*, Manuscripta Math. **36** (1981), no. 2, 147–162.

[MM83] S. Mori and S. Mukai, *On Fano 3-folds with $B_2 \geq 2$*, Algebraic varieties and analytic varieties (Tokyo, 1981) (Amsterdam), North-Holland, Amsterdam, 1983, pp. 101–129.

[MM86] S. Mori and S. Mukai, *Classification of Fano 3-folds with $B_2 \geq 2$. I*, Algebraic and topological theories (Kinosaki, 1984) (Tokyo), Kinokuniya, Tokyo, 1986, pp. 496–545.

[SB97] N. I. Shepherd-Barron, *Fano threefolds in positive characteristic*, Compositio Math. **105** (1997), no. 3, 237–265.

[Sho79] V. V. Shokurov, *The existence of a line on Fano varieties*, Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat. **43** (1979), no. 4, 922–964.

[Tak89] K. Takeuchi, *Some birational maps of Fano 3-folds*, Compositio Math. **71** (1989), no. 3, 265–283.