論文審査の結果の要旨

氏名　坂川博宣

物理的な系において相転移が起きる状況の下では、異なる相を分離する境界面いわゆる界面 (interface) が現れる。近年、このような界面に対する解析が様々な手法により進められている。論文提出者坂川が論じたのは $\nabla\varphi$ 界面モデルとよばれる微視的レベルにおける界面の数学モデルである。$\nabla\varphi$ 界面モデルについては最近静的な観点から、あるいは時間発展の立場から数多くの研究がなされているが、坂川は静的観点から特に

(1) 一般の有限距離相互作用 2 次ポテンシャルをもつ場合のエントロピー的反発
(2) 弱いピンニング効果をもつ $\nabla\varphi$ 界面モデルの大偏差原理と大数の法則への応用

という 2 つの問題を取り上げ考察を行った。

通常の $\nabla\varphi$ 界面モデルでは、微視的な界面エネルギーはその表面積として定まる。ところが、たとえば細胞膜 (membrane) を対象として取り上げ、それをモデル化する場合には、界面の表面積は一定であり、したがって界面の曲率といった第 2 次的な効果が支配的になり、エネルギーとしてそのようなものを採用する必要が生ずる。この違いを数学的にいえば、$\nabla\varphi$ 界面モデルでは最近接格子点間の相互作用を考慮すれば十分であるのに対して、細胞膜モデルではさらに遠くの点との間にも相互作用が存在するような系を考える必要があることを意味する。坂川は、ポテンシャルは 2 次と仮定して、一般の有限距離内の (finite range) 相互作用をもつエネルギーを考え FKG 不等式の成立を保証するような条件の下で、いわゆるエントロピー的反発の問題を考察した。即ち、領域のサイズ（一辺の長さ）を N とするとき、界面が常に正である確率は、$N \to \infty$ とするとき漸近的にほぼ $\exp\{-N^{d-2\ell}\log N\}$ と振舞うことを示し、定数 ℓ を相互作用を定める差分作用素の特性量として決定した。続いて、界面が常に正であるという状況の下で、いいかえればそのような条件付確率の下で界面がどの程度の高さにまで押し上げられるのかを考察した。得られた結果は $\sqrt{\log N}$ のオーダーであり、3 次元以上の $\nabla\varphi$ 界面モデルの場合に知られている結果と基本的に同等であることが示された。以上が上記の問題 (1) に対する結果である。

問題 (2) については、与えられた境界条件を巨視的レベルにおいて実現するようにスケーリングされた有界領域上の $\nabla\varphi$ 界面モデルを考え、そのエネルギーとして弱いピンニング効果を表す有界なポテンシャルを加えたものを採用する。このとき界面の巨視的高さ変数に対して N^d のオーダーで大偏差原理が成立し、速さ関数として総表面張力に、負の側に界面が移動することによる優位性を表すエネルギー項を加えたものが現れることを証明した。また 1 次元の場合に δ-ピンニングとよばれる高さ 0 においてのみピンニング効果をもつようなモデルについても考察した。対応する結果は、境界条件が 0

でピンニング効果のない場合には Deuschel, Giacomin, Ioffe によって示されていて、総表面張力が得られることは既知であったが、坂川の結果はそれを拡張したものである。大偏差原理の応用として、直ちに大数の法則を示すことができ、界面の極限における形状は速さ関数を最小にするプロフィールとして特徴付けられることがわかる。特にそれは変分問題の解であるが、そのような変分問題は Alt, Caffarelli, Friedman らを始めとして偏微分方程式論の枠組み内において既に論じられていて、自由境界問題と深いつながりをもつことが知られている。ピンニング効果がない場合には変分問題の解は非線形楕円型偏微分方程式によって記述されるが自由境界は現れない。このように、坂川は特異性をもつ非線形問題を微視的レベルにおけるモデルの設定およびその解析を通して導くことに成功し、微視的界面モデルの平衡系について数々の新たな見地を開拓したのである。これらの諸結果は高く評価することができる。

なお参考論文では、第 1 に確率格子気体モデルに対してその定常測度とカノニカルな Gibbs 分布の族が一致することを示し、第 2 に複数個の保存則をもつ相互作用拡散系の可逆測度の特徴付けを行っている。

以上のような理由により、論文提出者坂川博宣は博士（数理科学）の学位を受けるにふさわしい充分な資格があると認める。