論文の内容の要旨

論文題目：余層を使った積分変換理論と$\mathcal{E}$-加群上のコーシー問題

氏名：杉木 雄一

この論文は第一部と第二部の二つの部から成る。

第一部：余層の圏とラプラス変換
「The Category of Cosheaves and Laplace Transforms」

「余層」とは「層」の双対概念である。即ち、位相空間 X を固定したとき、F が X 上の余層であるとは、一つの開集合 U に対し一つの加群の射影系 $F(U)$ が対応し、また開集合の包含関係 $U \subset V$ に対し一つの準同型 $F(U) \to F(V)$ が対応していて、さらに局所化の条件を満たすものをいう。開集合に対し、単に加群を対応させただけでは豊富な結果は得られない。加群の射影系を対応させるというアイディアは、1987年、J. P. Schneiders によってなされた。彼は、余層の圏上でホモロジー理論を展開し、位相幾何への応用を与えた。

タイトルにある「ラプラス変換」とは次のものである。柏原-Schapira は1997年に、複素線形空間 E 上の錐的な構成可能層 F に対し、Laplace 変換 (の一般化)

$$L : F \overset{\mathrm{w}}{\otimes} \mathcal{O}_E \rightleftharpoons F^\wedge[n] \overset{\mathrm{w}}{\otimes} \mathcal{O}_{E^*}. \tag{1}$$

$$^tL : \mathrm{THom}\,(F, \mathcal{O}_E) \leftharpoondown \mathrm{THom}\,(F^\wedge[n], \mathcal{O}_{E^*}). \tag{2}$$

を導来圏上の同型として与えた。さらに彼らは (2) に関して、構成可能層とは限らない一

般の錘的な層 F に対しての Laplace 変換を考えるために、層複体 $\mathcal{O}^t$ を定義し、同型

$$(\mathcal{O}_E^t)^\wedge[n] \simeq \mathcal{O}_{E^*}^t \tag{3}$$

を導いた。

本論文第一部の目的は、(1) の F が構成可能とは限らない場合への拡張を試みることである。筆者は、Schneiders による余層の圏を発展させ、その圏上で (3) のアナロジーを見出した。

第一部は次のように構成されている。

まず第2章では、余層の圏を定義するために必要な一般論を準備する。k を可換環とするとき、k-加群の射影系を対象とするような圏を $\mathrm{Pro}(k)$ と書き、その性質を調べる。また、アーベル圏に値をとる一般化された層についても述べる。

第3章で Schneiders による余層の圏を再定義する。余層は $\mathrm{Pro}(k)^{\mathrm{op}}$ に値をとる層と定義される。また、余層の圏上での順像、逆像、固有的順像といった関手の性質を調べる。

第4章では、余層の圏の導来圏とその導来関手について述べる。余層の圏は単射的対象 (injective object) を十分に持つかどうかはわからないことが障害であった。その代わりとして、"c-injective" という新しい概念を導入し、余層の圏が c-injective な対象を十分に持つことを証明する。この結果によって、さまざまな導来関手が定義できるようになる。また、Poincaré-Verdier 双対 (のアナロジー) を余層の導来圏上でも成り立つことを示す。

第5章では、余層を構成するための道具を2つ紹介する。一つは、前余層 (precosheaf) を与えたとき、その誘導された余層 (associated cosheaf) が存在することを示す。もう一つは、層の圏から余層の圏への関手 c を定義し、その性質を調べる。c の定義は次のとおりである。A に対し、前余層

$$U \mapsto \Gamma_c(U; A)$$

が得られるが、その誘導された余層を $c(A)$ と書く。c がある条件下で導来関手を定めることを証明し、その性質を調べる。

第6章では、余層の理論を積分変換に応用する。まず、余層上での Poincaré-Verdier 双対を使って、Fourier-佐藤変換を定義する。次に (1) に関して、Kashiwara-Schapira が定義した層複体 $\mathcal{O}^t$ に相当する余層の複体 $\mathcal{O}^{\mathrm{cw}}$ を定義する。最後に、(3) のアナロジーである余層の導来圏上での同型 $(\mathcal{O}_E^{\mathrm{cw}})^\wedge[n] \simeq \mathcal{O}_{E^*}^{\mathrm{cw}}$ を証明する。

第二部：$\mathcal{E}$-加群に関するコーシー・コヴァレフスキーの定理について
「Notes on the Cauchy-Kowalevski theorem for $\mathcal{E}$-modules」(竹内氏との共同研究)

X を複素多様体、Y をその部分多様体とし、$\mathcal{M}$ を点 $p \in Y \times_X T^*X$ の近くで定義された (ある条件を満たす) 連接な $\mathcal{E}_X$-加群とする。このとき、石村によって証明された $\mathcal{E}$-加群に関するコーシー・コヴァレフスキーの定理は次の同型として表現される。

$$f_p^{-1} R\mathcal{H}om_{\mathcal{E}_X}(\mathcal{M}, \mathcal{O}_X) \xrightarrow{\sim} R\mathcal{H}om_{\mathcal{E}_Y}(\underline{f}_p^{-1}\mathcal{M}, \mathcal{O}_Y).$$

ただし、f_p^{-1} は超局所逆像 (microlocal inverse image) の関手である。この超局所逆像は、超局所切断 (microlocal cut off) と通常の逆像 f^{-1} の合成で書ける。しかしながら、石村の証明では通常の逆像 f^{-1} と超局所逆像 f_p^{-1} が厳密に区別されておらず、論理的なギャップがあった。

本論文第二部の目的は、超局所逆像と通常の逆像を注意深く区別し、論理的なギャップを埋め、石村の定理の詳細な証明を与えることである。

第二部は次のように構成されている。

第2章では対象 $R\mathcal{H}om_{\mathcal{E}_X}(\mathcal{M}, \mathcal{O}_X)$ の定義を復習する。この対象はある錘 G および G-閉集合 Z に依存して定義されるので、本論文中ではこの対象を $R\mathcal{H}om_{\mathcal{E}_X}^{(G,Z)}(\mathcal{M}, \mathcal{O}_X)$ と書いている。

第3章では、$R\mathcal{H}om_{\mathcal{E}_X}^{(G,Z)}(\mathcal{M}, \mathcal{O}_X)$ に超局所切断を施したときのマイクロ台の評価を行う。この評価から別の集合の組 (G_0, Z_0) を選び、

$$f_p^{-1} R\mathcal{H}om_{\mathcal{E}_X}^{(G,Z)}(\mathcal{M}, \mathcal{O}_X) = f^{-1} R\mathcal{H}om_{\mathcal{E}_X}^{(G_0,Z_0)}(\mathcal{M}, \mathcal{O}_X)$$

と表現できることがわかる。

第4章では、この第3章の結果を用いて石村の定理の詳細な証明を与える。