論文審査の結果の要旨

氏名　川北　素子

有限体上定義された代数曲線の有理点は, 代数幾何学と数論の両方にまたがる興味深い研究対象である. A. Weil による, 有理点の母関数としての合同ゼータ関数の定義と, それを解明しようとする努力が, 数論・代数幾何の大発展につながったことはよく知られている. また, 有理点の数に関しては, Hasse-Weil による限界式が知られており, 有理点の数は種数の関数として与えられる上限をもつ. 本論文において, 川北素子は, 有限体上定義された代数曲線で, 有理点の数がこの上限に近い代数曲線を構成し, いくつかの場合に, 従来知られているよりも有理点の数が多い代数曲線を見い出している.

第1章は, 有限体上の代数曲線の有理点について, 既知の結果の整理にあてられている. 第2章では, 射影直線の Artin-Schreier 被覆を考え, 最大曲線を構成している. $\mathbf{F}_{q^m}$ の元 $a_1, a_2, \ldots, a_M, b_1, b_2, \ldots, b_M$ と $2M - m = w$ を充たす非負正数 M, w をとる. トレース $Tr : \mathbf{F}_{q^m} \to \mathbf{F}_q$ を用いて $\mathbf{F}_q$ 上の2次形式 $Q(X) = \sum_{i=1}^{M} Tr(a_i X) Tr(b_i X)$ を考える. 正整数 h に対し

$$R_h = \{\sum_{i=0}^{h} c_i X^{p^i} \ \mid \ c_i \in \mathbf{F}_{q^m}\}$$

とおく. これらの記号の下に, 最大曲線構成のための次の定理を示している.

定理. 自然数 h と $R(X) \in R_h$ に対し, $Q(X) \equiv Tr(XR(X)) \bmod X^{q^m} - X$ が成立する. 代数曲線 C_h を $Y^h - Y = XR(X)$ で定義すると以下が成り立つ.

(i) $a_1, a_2, \ldots, a_M, b_1, b_2, \ldots, b_M$ が $\mathbf{F}_q$ 上線形独立ならば, C_R の有限体 $\mathbf{F}_{q^m}$ 上の有理点は $q^m + 1 + (q-1)\sqrt{q^m q^w}$ で与えられる.

(ii) q が偶数であり $\deg R(X) \geq 2$ であるか, q が奇数であり $\deg R(X) \geq 1$ であるとする. このとき, C_R の種数は $(q-1) \deg R(X)/2$ で与えられる.

m を偶数とする. q が偶数であり $m \geq 4$, $\ell \leq (m/2) - 1$ であるか, q が奇数であり $\ell \leq m/2$ であるとき, 上記定理を用いて, $\mathbf{F}_{q^m}$ 上種数 $(q^\ell - 1)q^{(m-2)/2}$ の最大曲線が存在することを示している.

標数が2のときには, van der Geer と Vlugt が同様の結果を示しており, これらの結果はその一般化になっている.

第3章では射影直線の Kummer 被覆を用いて, 有限体 $\mathbf{F}_q$ 上有理点を多数もつ代数曲線を構成している. 最終的にはコンピュータによって探索を行っているが, この方法によって, いくつかの種数において, 有理点の数についての既知の記録を更新している.

有限体上定義された代数曲線は, Goppa が示しているように, 符号理論への応用をもつ. 一般的に言って, 有理点の多い代数曲線からは良い符号が構成され, この観点からも有理点の数の多い代数曲線を発見することは意味をもつ. 本論文は, このように, 有理点の数の多い代数曲線を組織的に研究しており, これまで知られていたよりも格段によい結果を得ており, この方面の研究に大きく貢献している.

よって、論文提出者　川北　素子は、博士（数理科学）の学位を受けるにふさわしい充分な資格があると認める。

審査委員
主査　東京大学（数理）　教授　桂　利行
（数理）　教授　織田　孝幸
（数理）　教授　川又　雄二郎
（数理）　教授　堀川　穎二
（数理）　教授　宮岡　洋一
（数理）助教授　寺杣　友秀