

論文の内容の要旨

論文題目 Stable Dynamical Systems Associated with Cellular Automata (セルオートマトンに附随する安定な力学系)

氏 名 野邊 厚

1 はじめに

セルオートマトンとは、セルの列からなる離散力学系である。各々のセルのとり得る状態は有限個であり、各セルは局所的な規則により次の状態へ時間発展する。時間発展の規則は単純であるにもかかわらず、一般にセルオートマトンは複雑な挙動を示す。1980年代、Wolframらによりその挙動が詳しく調べられ、セルオートマトンはclass 1から4の四つのクラスに分類された。中でも、class 3, 4に分類されるセルオートマトンの挙動は複雑である(図1)。

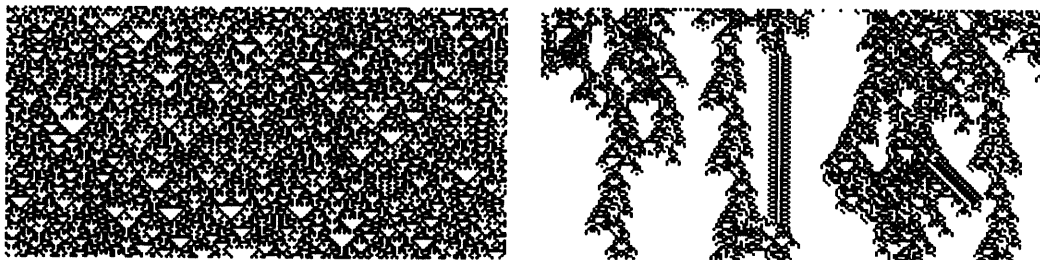


図 1: class 3(左) および class 4(右) に分類されるセルオートマトンの挙動。横一列のセルが上から下へ時間発展している。黒が1, 空白が0を表す。

セルオートマトンはその挙動が乱流、非線形波動および化学反応などの自然現象と似ており、それらの自然現象を記述する微分方程式との対応を明らかにすることが一つの課題とされている。実際、それはWolframの提唱したセルオートマトンにおける20の問題の9番目に挙げられている。

1990年代、高橋・薩摩により発見されたソリトンセルオートマトンとKdV方程式などの可積分な偏微分方程式との直接的対応が明らかにされた。この事実は、上に挙げたWolframの9番目の問題のソリトンセルオートマトンにおける一つの解答と見なせる。これらの一連の研究において、超離散化とよばれる次の手続きが鍵となった。

1. 適切な (有理写像で与えられる) 差分方程式の 1 パラメータ (ϵ) 族を構成する.
2. パラメータ ϵ の極限 ($\epsilon \downarrow 0$) をとり, 区分線形関数で与えられる差分方程式を得る. この差分方程式が整数値で閉じていればセルオートマトンの時間発展規則と見なせる.

超離散化においては, 次の恒等式が重要である.

$$\lim_{\epsilon \downarrow 0} \epsilon \log \left(\exp \left(\frac{A}{\epsilon} \right) + \exp \left(\frac{B}{\epsilon} \right) \right) = \max(A, B).$$

超離散化の利点の一つは, 適切な差分方程式の解の極限が存在すれば, それが対応するセルオートマトンの解となることである.

さらに, 超離散化を逆方向に行うことも可能であり, それは逆超離散化とよばれる. すなわち, セルオートマトンの時間発展を記述する区分線形な差分方程式が得られれば, そのセルオートマトンを極限とする適切な差分方程式が形式的に得られる. (逆) 超離散化そのものは方程式の可積分性とは無関係であり, 非可積分系にも適用可能である. したがって, 逆超離散化により, 冒頭に挙げた class 3, 4 の複雑な挙動を示すセルオートマトン等に対しても対応する適切な差分方程式を得ることが可能と考えられる. しかし, 逆超離散化によるセルオートマトンと適切な差分方程式との対応付けに成功したという報告はいまだなされていない.

本研究の目的は, セルオートマトンと適切な差分方程式の逆超離散化による対応付けである. そのため, 差分方程式を与える写像に対し, セルオートマトンに関する安定性を定義する. ある写像がセルオートマトンに関して安定であるとは, その写像の与える力学系が初期値の摂動に対してセルオートマトンの時間発展パターンを保つことである. また, フィルター写像を定義し, それを用いてセルオートマトンに関して安定な写像を構成する.

2 セルオートマトンに関する安定性

セルオートマトンの時間発展はその規則 (局所写像) から誘導される離散的な大域写像 $\Psi: S^L \rightarrow S^L$ により定まる. ただし, $S = \{0, 1, 2, \dots, M-1\}$ はセルオートマトンのとる値の集合, L はセルの個数とする. セルオートマトンをこの離散写像と同一視し, Ψ で表す. 任意の離散写像 Ψ に対し, それに附随する (セルオートマトン Ψ と同じ解を与える) 区分線形写像 K_Ψ を構成することが可能である. しかし, K_Ψ から単純な逆超離散化により得られる差分方程式はセルオートマトン Ψ の時間発展パターンを必ずしも保たない (図 2). そこで, セルオートマトンの時間発展パターンを保つ十分条件として, セルオートマトンに関する

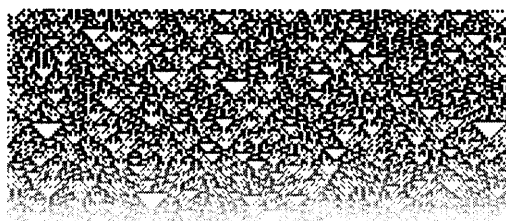


図 2: 単純な超離散化で得られる差分方程式の解の挙動. 図 1 のクラス 3 のセルオートマトンに附随する. 灰色の濃淡により 0 から 1 の間の実数値を表す. 時間とともにパターンが消失する.

安定性を定義する.

定義 1 次をみたく正数 $\delta (< 1/2)$ が存在するとき, セルオートマトン Ψ に附随する区分線形写像 K_Ψ は Ψ

に関して安定である.

$$|\mathbf{U} - \mathbf{X}| < \delta \Rightarrow |\mathcal{K}_\Psi(\mathbf{X}) - \Psi(\mathbf{U})| < \delta.$$

ただし, $\mathbf{U} \in S^L$ および $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^L$.

さらに, 区分線形写像 \mathcal{K}_Ψ を安定化させるフィルター写像 \mathcal{F} を次のように定義する.

定義 2 次の条件をみたすとき, 区分線形写像 $\mathcal{F}: \mathbb{R}^L \rightarrow \mathbb{R}^L$ はフィルター写像とよばれる.

$$\bullet \exists \delta (0 < \delta < 1/2) \text{ s.t. } |\mathbf{U} - \mathbf{X}| < \delta \Rightarrow \mathcal{F}(\mathbf{X}) = \mathbf{U}.$$

フィルター写像の具体例を挙げる.

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(X_1, X_2, \dots, X_L; \Delta) &= (\mathcal{F}_M(X_1; \Delta), \mathcal{F}_M(X_2; \Delta), \dots, \mathcal{F}_M(X_L; \Delta)), \\ \mathcal{F}_M(X; \Delta) &:= \frac{1}{1-2\Delta} \sum_{i=0}^{M-1} (\max[X_n - i - \Delta, 0] - \max[X_n - i - (1-\Delta), 0]). \end{aligned}$$

これらから次の定理を得る.

定理 1 合成写像 $\mathcal{F} \circ \mathcal{K}_\Psi$ および $\mathcal{K}_\Psi \circ \mathcal{F}$ はセルオートマトンに関して安定な区分線形写像である.

区分線形写像 \mathcal{K}_Ψ および \mathcal{F} は逆超離散化が可能である. これらから逆超離散化により得られる滑らかな写像をそれぞれ $k_{\Psi[\epsilon]}$ および $f_{[\epsilon]}$ とする. $f_{[\epsilon]}$ を滑らかなフィルター写像とよぶ. 上の具体例に対応する滑らかなフィルター写像 $f_{[\epsilon]}$ は

$$\begin{aligned} f_{[\epsilon]}(X_1, X_2, \dots, X_L; \Delta, \epsilon) &= (f_{M[\epsilon]}(X_1; \Delta, \epsilon), f_{M[\epsilon]}(X_2; \Delta, \epsilon), \dots, f_{M[\epsilon]}(X_L; \Delta, \epsilon)), \\ f_{M[\epsilon]}(X; \Delta, \epsilon) &= \frac{\epsilon}{1-2\Delta} \sum_{i=0}^{M-1} \left(\log \left[1 + \exp \left[\frac{X_n - i - \Delta}{\epsilon} \right] \right] - \log \left[1 + \exp \left[\frac{X_n - i - (1-\Delta)}{\epsilon} \right] \right] \right), \end{aligned}$$

である. 定義 1 と同様に滑らかな関数に対し安定性を定義する (十分小さい ϵ に対し, 定義 1 と同様の正数 δ が存在するならば安定とする) と, 次の定理が得られる.

定理 2 合成写像 $f_{[\epsilon]} \circ k_{\Psi[\epsilon]}$ および $k_{\Psi[\epsilon]} \circ f_{[\epsilon]}$ はセルオートマトンに関して安定かつ滑らかな写像である.

3 セルオートマトンに附随する安定な力学系の具体例

セルオートマトンに関して安定かつ滑らかな写像の与える差分方程式の具体例を挙げる. class 3 に属するセルオートマトンとして, ルール 90 の elementary セルオートマトンを考える. このとき, $k_{\Psi[\epsilon]}$ は次のようになる.

$$\begin{aligned} k_{\Psi[\epsilon]}(X_1, X_2, \dots, X_L) &= (k_{\Psi_{90}[\epsilon]}(X_L, X_1, X_2), k_{\Psi_{90}[\epsilon]}(X_1, X_2, X_3), \dots, k_{\Psi_{90}[\epsilon]}(X_{L-1}, X_L, X_1)), \\ k_{\Psi_{90}[\epsilon]}(X_{n-1}, X_n, X_{n+1}) &= \epsilon \log \left[\cosh \left[\frac{X_{n+1} - X_{n-1}}{\epsilon} \right] \right]. \end{aligned}$$

定理 2 から, 次の差分方程式はルール 90 の elementary セルオートマトンに関して安定である.

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{X}} &= k_{\Psi[\epsilon]} \circ f_{[\epsilon]}(\mathbf{X}), \\ \hat{\mathbf{X}} &= f_{[\epsilon]} \circ k_{\Psi[\epsilon]}(\mathbf{X}). \end{aligned} \tag{1}$$

ただし, $\mathbf{X} = (X_1, X_2, \dots, X_L)$ とし, $\hat{\mathbf{X}}$ で \mathbf{X} の次の時刻での値を表す. この差分方程式の解の挙動はセルオートマトンの時間発展パターンを保存している (図 3).



図 3: 差分方程式 (1) の時間発展パターン. ルール 90 の elementary セルオートマトン (図 1 の class 3) に附随する. 灰色の濃淡により 0 から 1 の間の実数値を表す. 初期値は 0 から 1 の間の実数値をとる. 図 2 と異なり, パターンが消滅しない.

class 4 に属するセルオートマトンに対しても同様に安定な差分方程式を構成できる.

また, QRT 系とよばれる 2次元の力学系をある条件のもとで超離散化すると, 周期的なセルオートマトンを得る. このセルオートマトンに附随する安定な力学系はフィルター写像 $f_{[\epsilon]}$ と次の写像 $k_{\Psi[\epsilon]}$ により与えられる.

$$k_{\Psi[\epsilon]} : \begin{pmatrix} X_n \\ Y_n \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \epsilon \log \left(\frac{\exp((2Y_n + \bar{\kappa})/\epsilon) + \exp((Y_n + \bar{\lambda})/\epsilon) + \exp(\bar{\mu}/\epsilon)}{\exp(X_n/\epsilon)(\exp((2Y_n + \bar{\alpha})/\epsilon) + \exp((Y_n + \bar{\beta})/\epsilon) + \exp(\bar{\gamma}/\epsilon))} \right) \\ \epsilon \log \left(\frac{\exp((2X_{n+1} + \bar{\gamma})/\epsilon) + \exp((X_{n+1} + \bar{\zeta})/\epsilon) + \exp(\bar{\mu}/\epsilon)}{\exp(Y_n/\epsilon)(\exp((2X_{n+1} + \bar{\alpha})/\epsilon) + \exp((X_{n+1} + \bar{\delta})/\epsilon) + \exp(\bar{\kappa}/\epsilon))} \right) \end{pmatrix}.$$

得られた力学系は, 滑らかな関数で与えられかつ近似的に周期的な解を持つ (図 4).

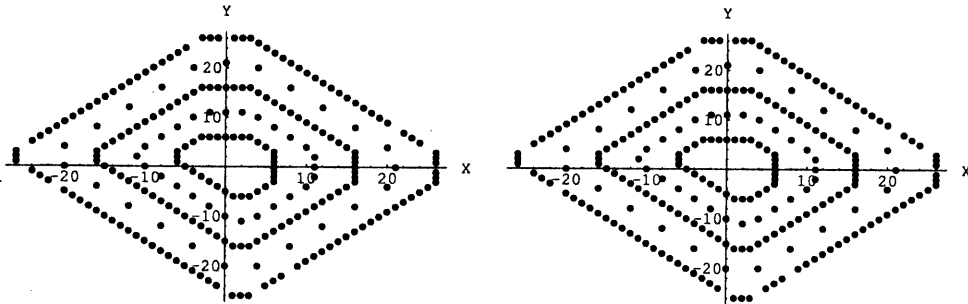


図 4: QRT 系の超離散化で得られるセルオートマトン (左), およびその逆超離散化で得られる安定な ($k_{\Psi[\epsilon]} \circ f_{[\epsilon]}$ で与えられる) 力学系 (右) の解の様子. 初期値をそれぞれ (4, 5), (4, 10), (4, 15), (4, 20), (4, 25) および (4.4, 5.4), (4.4, 10.4), (4.4, 15.4), (4.4, 20.4), (4.4, 25.4) とする. また, $f_{[\epsilon]}$ のパラメータを $\Delta = 0.499$ および $\epsilon = 0.01$ とし, $k_{\Psi[\epsilon]}$ のパラメータを $\bar{\alpha} = -1, \bar{\beta} = \bar{\delta} = 2, \bar{\gamma} = \bar{\kappa} = -1, \bar{\epsilon}_0 = 1, \bar{\epsilon}_1 = 2, \bar{\zeta} = \bar{\lambda} = 2, \bar{\mu} = 3$ とする.

4 まとめ

差分方程式がセルオートマトンの時間発展パターンを保存する十分条件として, セルオートマトンに関する安定性を定義した. フィルター写像を導入し, セルオートマトンに附随する任意の区分線形写像 (もしくは, その写像の与える力学系) を安定化する一般的手法を得た.