論文内容の要旨

論文題目　星型 Dynkin 図形上及び
$\tilde{A}$ 型 Dynkin 図形上の minuscule heap

氏名　萩原 学

minuscule heap はラベル付き半順序集合の一つであり、組み合わせ論的に興味深い性質を持つことが期待され、近年活発に研究されている対象である。この論文は二部構成になっており、そのどちらも minuscule heap を主要な研究対象としている。第一部では simply-laced な星型 Dynkin 図形上の minuscule heap について、第二部では $\tilde{A}$ 型の Dynkin 図形上の minuscule heap についての幾つかの結果をまとめている。

Γ を一般 Cartan 行列 A を表す Dynkin 図形とする。また A, Γ と対応する Kac-Moody Lie 環を $\mathfrak{g}$ とする。A の行、列は Γ の node 集合 $N(\Gamma)$ でインデックスされているとする。W を $\mathfrak{g}$ に関する Weyl 群とする。minucule heap は W の λ-minuscule 元に由来するラベル付き半順序集合である。

Definition. W を $\mathfrak{g}$ の Weyl 群とする。λ を $\mathfrak{g}$ の integral weight とする。$w \in W$ が **λ-minuscule 元**であるとは、最短表示 $w = s_{i_1} s_{i_2} \ldots s_{i_r}$ であって

$$s_{i_k}(s_{i_{k+1}} \ldots s_{i_r} \lambda) = s_{i_{k+1}} \ldots s_{i_r} \lambda - \alpha_{i_k} \text{ for all } 1 \leq k \leq r$$

という条件をみたすものがあることをいう。ここで、s_{i_k} は simple reflection で、α_{i_k} は s_{i_k} と対応する simple root である。

λ-minuscule 元は**fully commutative** と呼ばれる性質、つまり $w \in W$ の最短表示を一つ与えると他の最短表示全てが可換な生成元の交換によって得られるという性質、をもっている。この fully commutative 元は**heap** と呼ばれる Γ-ラベル付き poset と関連が知られる。**Γ-ラベル付き poset** とは、poset $(P, \leq)$ と写像 $\phi : P \to N(\Gamma)$ の組 $(P, \leq, \phi)$ のことをいう (この ϕ をラベル写像と呼ぶ)。**minuscule heap** とは minuscule 元 $w \in W$ と対応する heap のことである。この minuscule heap を Γ 上の minuscule heap と呼ぶ。

minuscule heap に関して特に研究されてきたものは対応する λ-minuscule 元の λ が dominant weight であるときだった。例えば A 型の Dynkin 図形上の minuscule heap に関して、対応する λ-minuscule 元の λ が dominant であるとき、その minuscule heap は Young 図形ということができる。R. Proctor は simply-laced Dynkin 図形上の minuscule heap のうち λ が dominant であるものを、slant 既約という概念を用いて 15 種類に分類した。そしてそれらを既約な d-complete poset と名づけ、Young 図形のもつ性質である hook の公式や Jeu de taquin をそれらに拡張させた。そして Stembridege が multiply-laced な Dynkin 図形上の minuscule heap のうち、やはり λ が dominant であるものの slant 既約なそれを分類した。この論文では λ を dominant と仮定せず、一般の integral weight λ に対する minuscule heap を研究している。そして、星型の Dynkin 図形上の minuscule heap と $\tilde{A}$ 型の Dynkin 図形上の minuscule heap を特徴付けたのが主要な結果である。

この論文の第一部では、まず星型の Dynkin 図形という Dynkin 図形のあるクラスを定義する。**星型の Dynkin 図形**とは、simply-laced な Dynkin 図形で幾つかの A 型の Dynkin 図形をそれぞれの端の点で連結させたものである。連結された node を中心と呼ぶ。そして星型 Dynkin 図形の持つ acyclic 性から得られる minuscule heap の性質、それはランクが定義できる性質、を用いて**slant lattice** という Γ-ラベル付き poset を定義するまず $N(\Gamma) \times \mathbb{Z}$ の元 $(v, m), (u, m+1)$ に対し、v, u が Γ 上隣り合っているときに $(v, m) < (u, m+1)$ と関係を定義しこの reflective, transitive closure $\leq$ により順序を定める。そして中心を o とし、$(o, 0)$ を含む $N(\Gamma) \times \mathbb{Z}$ の connected component を slant lattice と呼ぶ。この slant lattice の cover subposet、つまり部分集合の中のカバー関係だけで生成した順序による

順序集合を定義しする。そして全ての星型 Dynkin 図形上の minuscuhe heap を、slant lattice に自然に埋めこんだ。更に、slant lattice の cover subposet が星型 Dynkin 図形上の minuscule heap である為の必要十分条件を与えた。つまり、星型 Dynkin 図形上の minuscule heap の特徴づけを結果として得た。この特徴づけの際に、**D-matrix** という組み合わせ論的に定義できる行列を定義した。この D-matrix には minuscule heap の中核的な情報が含まれ、D-matrix ごとに **core** とよぶ minuscule heap を定義した。全ての minuscule heap は core に飾り付けをしたものとして捕らえられる。この論文では、core への飾り付けの条件を記述できた。また D-matrix を導入し、それに関する考察の系として minuscule element が有限個しかない simply-laced Dynkin 図形に対応する Weyl 群を決定した。

第二部では $\tilde{A}$ 型の Dynkin 図形上の minuscule heap を特徴付けた。$\tilde{A}$ 型の minuscule heap は殆どが ranked poset にならないことが知られている。また、サポート (Im ϕ のこと) が $N(\Gamma)$ 全体となるときは λ は決して dominant にならないことも知られている。$\tilde{A}$ 型の Dynkin 図形上の minuscule heap は殆ど研究されていなかったと言える。この論文では、slant lattice の類似と考えられる Γ-ラベル付き poset L_k という poset を定義した。L_k は $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ に slant lattice 同様に順序を定義し、ある向きへの平行移動が生成する群 G_k により割ってできる順序集合のうち $(0,0)$ を含む connected component である。主定理は L_k の convex subset が minuscule heap であり、また全ての $\tilde{A}$ 型 Dynkin 図形上の minuscule heap がある L_k のある convex subset と同型になることである。もう一つの主定理として、$\tilde{A}$ 型の affine Weyl 群と同型であることが知られる affine permutation group に対し、maximal parabolic subgroup で右から割った剰余類の最短代表元に対して、minuscule 元か否かの組み合わせ論的判定条件を与えた。その為に **capped Young** 図形という対象、視覚的には Young 図形にある **cap** をかぶせた対象、を定義しそれを用いて特徴付けした。