論文審査の結果の要旨

氏名　　萩原　　学

萩原学氏の論文は, 星型 Dynkin 図形および $\widetilde{A}$ 型 Dynkin 図形の上の minuscule heap の組合せ論的な分類を与えたものである。

minuscule heap は, Weyl 群 W の minuscule 元を Coxeter 生成系に関する最短表示の観点から組合せ論的に捉えたものである。ここでいう Weyl 群は generalized Cartan matrix $A=(a_{ij})_{i,j\in I}$ (または I を頂点集合とする Dynkin 図形 Γ) から決まる Kac-Moody Lie 環の Weyl 群であり, simple root α_i に対応する reflection s_i, $i\in I$, 全体を生成系とする Coxeter 群になっている。W の元 w が minuscule であるとは, w の最短表示 $s_{i_1}s_{i_2}\cdots s_{i_l}$ 及び整 weight λ が存在して $s_{i_k}s_{i_{k+1}}\cdots s_{i_l}\lambda=s_{i_{k+1}}\cdots s_{i_l}\lambda-\alpha_{i_k}$ $(1\leqq {}^\forall k\leqq l)$ が成立することをいう (この定義は D. Peterson による)。これは Coxeter 群に関する概念ではなく, Cartan 行列 A に依存した概念である。この λ として dominant な整 weight がとれるとき w は dominant minuscule であるという。例えば A が有限型の場合, λ が minuscule 表現の highest weight ならば W/W_λ の最短代表元はどれも dominant minuscule である。一般に W の元 w の最短表示全体は, 表示の中の隣接する可換な生成元の順序の交換を繰返して移り合えるものどうしに同値類別でき, その各同値類に対し heap 呼ばれる Γ-labeled poset (P,ϕ) すなわち半順序集合 P と写像 $\phi\colon P\to I$ との対が定義される。P の任意の linear extension $E\colon P\to[1,l]$ $(l=|P|)$ に対し $s_{\phi(E^{-1}(1))}s_{\phi(E^{-1}(2))}\cdots s_{\phi(E^{-1}(l))}$ が w の最短表示になり, これにより P の linear extension 全体とこの類に属する最短表示全体とが一対一に対応する。w の最短表示全部がこの意味の一つの同値類に属するとき w は fully commutative であるといい, この唯一の同値類に対応する heap を w の heap という。上述の minuscule 元は fully commutative であることが R. Proctor や J. Stembridge によって示され, さらに Γ-labeled poset が minuscule 元の heap すなわち minuscule heap になるための構造上の条件が Stembridge によって与えられている。

本論文はこの条件を出発点とし, Γ を固定して Γ 上の minuscule heap がどれだけあるかを同型を除き全部書き上げる方法を, ある種の Γ に対し具体的に与えるものである。この種の最初の結果は S. Billey, W. Jockusch 及び R. Stanley による A 型の Weyl 群に関するもので, fully commutative 元と minuscule 元は一致し, その heap はすべて skew Young 図形を斜めに回転した形になる。特に heap が skew でない Young 図形になるものが dominant minuscule で, その場合 no 最短表示の個数すなわち linear extension (標準盤) の個数は hook length formula で与えられる。その後 Proctor は Γ が simply-laced のとき dominant minuscule heap は彼の用語で d-complete と呼ばれる性質を持ち, これがあると hook length formula や jeu de taquin など Young 図形と類似した著しい性質を持つことを示した。

本論文では Γ を制限するが, dominant と限らない minuscule heap 全体を分類するところに特徴がある。Γ が simply-laced で acyclic な場合, Γ 上の任意の minuscule heap は本論文で導入されている Γ 上の slant lattice と呼ばれる $I\times\mathbb{Z}$ の部分集合に埋め込まれ, 一種の座標表示が決まる。この座標表示を使って, slant lattice の部分集合として minuscule heap を分類するのが本論文の特徴である。前半の star-shaped の場合, すなわち Γ が 1 点 o から何本かの枝が出ている形をしている場合にはこれがまさに適用でき

る。ラベルが o で rank が最大の元を t_o, 最小の元を b_o と書くと, $[b_o, t_o]$ の部分のは各枝に上に三角形の旗をいくつか並べた形をしており, その具体的な配置は D-matrix と呼ばれるものによって記述できる。その外部にも若干の元があるのが一般的で, 各三角形の外にどういう形に元が付属しうるか, それが全体として可能なのは付属物がさらにどういう条件を満たしているときかも正確に記述している。後半の $\widetilde{A}_n$ 型の場合は acyclic でなく, ほとんどの minuscule heap は ranked poset にならず, support が全体の場合は slant lattice への埋め込みの手法はそのまま使えないが, 本論文ではそこを L_k という slant lattice を変形したもの (A 型の slant lattice を, 1 周すると rank に相当するものが k ずれるように張り合せたもの) を導入することにより突破している。A 型の場合の分類結果が slant lattice の convex subset となったのと同様に, L_k の有限な convex subset (ただし k は 1 から n まで動く) 全体が Γ 上の minuscule heap 全体の分類結果を与える (ただし rank 方向に平行移動しただけのものは同じとみなす)。$\widetilde{A}_n$ 型 Weyl 群には dominant minuscule 元は support が全体でないものしかないが, 本論文ではそれに準ずるものとして, 極大放物型部分群である A_n 型 Weyl 群で割った剰余類の最短代表元になっている minuscule 元に対し, $\mathbb{Z}$ の置換として表示したときどういう条件を満たす元になるかも決めている。

以上のように本論文は, 組合せ論と Lie 環論の双方が興味をもちうるある対象を完全に分類し, 特に $\widetilde{A}_n$ 型の場合について結果も大変興味を引く形にまとめている。よって, 論文提出者萩原学は, 博士 (数理科学) の学位を受けるにふさわしい充分な資格があると認める。