論文の内容の要旨

論文題目　　**Small knots and links**

(スモール結び目とスモール絡み目について)

氏名　　松田 浩

3次元多様体の持つ性質を研究するために、その中に埋め込まれた圧縮不能曲面を使うことは 有効な方法であることが よく知られている。例えば、圧縮不能曲面を含む3次元多様体は そのような曲面を使って 各部品が3次元球体になるまで 分解できることがわかっている [11]。また これとはほとんど反対の性質、埋め込まれた圧縮不能閉曲面を含まないという性質、を持つ3次元多様体についても いくつかの研究がなされている。このような性質を持つ3次元多様体は スモール (small) であると呼ばれている。スモール多様体を研究したものとして [10], [8] などがある。しかし スモール多様体がどれくらいたくさん存在するのかについては、ほとんど知られていない。この論文では、境界が いくつかのトーラスだけから成るスモール多様体の存在性について 研究した。

1. 本論文の内容

絡み目とは、3次元多様体内に なめらかに埋め込まれた閉1次元多様体である。結び目とは、成分数が1の絡み目である。閉3次元多様体内に埋め込まれた 成分数が n の絡み目の外部は、境界が n 個のトーラスだけから成る3次元多様体である。閉3次元多様体内の絡み目がスモールであるとは その絡み目の外部がスモール多様体であること と定義されている。

結び目がスモールであるという概念は [10] などで使われていて、代数幾何学を用いる結び目理論において扱われることの多い 結び目の種類の1つである。例えば、スモール結び目の外部の基本群から構成される指標多様体 (character variety) の各既約成分は 複素1次元であることが示されている [1]。

現在までに知られているスモール結び目の例には、3次元球面内の2橋結び目 [4], [3]、長さが3のモンテシーノス結び目 [9] や、閉3次元多様体内の結び目で その外部が 円周上の 1つ穴開きトーラス束の構造を許容するもの などがある。この論文の前半では、上記の例とは 本質的に異なるスモール結び目の例を構成した。

定理. スモール結び目を含む サファイア空間は 無限個存在する。また このスモール結び目の外部は 3次元球面内のどのような結び目の外部とも同相ではなく、円周上の 1つ穴開きトーラス束の構造を許容しない。

定理の後半部分より、ここで構成した結び目の外部は 境界が1つのトーラスだけから成る3次元スモール多様体として 上記の例とは異なる新しい例であることがわかる。

ここで 森元氏 [7] により定義されたサファイア空間を紹介する。Kb_1, Kb_2 を2つのクラインボトルとし、$Kb_1\tilde{\times}I$, $Kb_2\tilde{\times}I$ を それぞれ Kb_1, Kb_2 上の ひねり単位区間束とする。サファイア空間とは、この2つの多様体 $Kb_1\tilde{\times}I$, $Kb_2\tilde{\times}I$ を それらの境界であるトーラスに沿って貼り合わせて得られる閉3次元多様体である。

この論文の後半では、3次元球面内のスモール絡み目について研究した。現在までに スモールであると証明されている絡み目には、2橋絡み目 [4], [3]、ボロミアン環 [5] などがある。

第6節では、Lozano 氏 [5] とは異なる方法で ボロミアン環がスモール絡み目であることの 初等的で新しい証明を得た。

第7節では、3次元球面内の与えられた絡み目が スモールでないことを判定する条件として 現在までに知られているものを いくつか紹介する。

第8節では、Finkelstein 氏 [2] の定理の証明から 次の定理が得られることを指摘した。

定理. L を3次元球面内の絡み目とする。L は 閉3糸組み紐として表示されていて、L の外部には本質的トーラスが埋め込まれていないと仮定する。このとき、L と その組み紐表示の軸である自明な結び目とを合わせて得られる絡み目は スモール絡み目である。

この定理の中で用いる絡み目 L は 一般にはスモール絡み目ではない、ということを Finkelstein 氏 [2] と Lozano 氏、Przytycki 氏 [6] が示している。

第9節では、8節での定理を 次のような ある1つの閉4糸組み紐の場合の定理に拡張した。

定理. L を3次元球面内の4成分絡み目とする。L は $\sigma_1^{-2}\sigma_2^{-2}\sigma_3^{-2}$ を組み紐の語とする 閉4糸組み紐として表示されていると仮定する。このとき、L と その組み紐表示の軸である自明な結び目とを合わせて得られる5成分絡み目は スモール絡み目である。ここで、$\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ は4糸組み紐群の標準生成元である。

9節の最後では、ここで構成した5成分絡み目の外部は モンテシーノス絡み目 $K(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -2+\frac{1}{2})$ の外部と同相であることを 指摘する。

第１０節では、９節で得られた結果を 次のようなモンテシーノス絡み目の場合の定理に拡張した。

定理. 任意の整数 a に対して、５成分モンテシーノス絡み目 $K(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2},a+\frac{1}{2})$ は スモール絡み目である。

また この定理は ６成分モンテシーノス絡み目の場合に 単純には拡張できないこと、つまり、全ての整数 a に対して ６成分モンテシーノス絡み目 $K(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2},a+\frac{1}{2})$ は スモール絡み目ではないこと、も示した。

2. 参考論文

題目 Tangle decompositions of doubled knots.
(Tokyo Journal of Mathematics 掲載)
２重化結び目の本質的タングル分解を与える球面は、そのコンパニオン結び目の本質的タングル分解を 自然に与えることを示した。

題目 Tangle decompositions of satellite knots.
(Revista Matemática Complutense 掲載、林 忠一郎 氏、小沢 誠 氏と共著)
前述の参考論文 "Tangle decompositions of doubled knots" での定理を サテライト結び目の場合について考察した。

題目 Free genus one knots do not admit essential tangle decompositions.
(Journal of Knot Theory and Its Ramifications 掲載、小沢 誠 氏と共著)
自由種数が１の結び目は 全ての自然数 n に対し、本質的 n 糸タングル分解を持たないことを示した。

題目 Complements of hyperbolic knots of braid index four contain no closed embedded totally geodesic surfaces.
(Topology and Its Application 掲載予定)
組み紐指数が４である結び目 K の外部に埋め込まれた本質的閉曲面 F は、次の３つの条件のうち 少なくとも１つを満たしていることを示した。
(１) F は メリディアン的に圧縮可能である。
(２) F と K の外部に埋め込まれ、その境界を F 上に持つ 本質的アニュラスが存在する。
(３) K は F 上の単純閉曲線にアイソトピックである。

この系として、K が双曲的結び目である時 F は K の外部で全測地的ではない ということがわかった。

題目 Genus one knots which admit $(1,1)$-decompositions.
(Proceedings of the American Mathematical Society 掲載予定)
種数が１であり、（１，１）分解をもつ結び目の型を決定した。

題目 On the additivity of the clasp number of knots.

3次元球面内の結び目に対して定義されるクラスプ数の 加法性について次の定理を得た。

定理. K_1, K_2 を3次元球面内の自明でない 2つの結び目とし、この2つを連結和して得られる結び目を $K_1 \# K_2$ で表す。このとき $K_1 \# K_2$ のクラスプ数が3であれば、K_1, K_2 のクラスプ数は それぞれ1, 2である。

謝辞

この博士論文作製に際しての 松本 幸夫 先生、Gordon, Cameron 先生、Reid, Alan 先生のご指導、ご助言に 心より感謝いたします。また 著者の研究活動を支援して下さった日本学術振興会の皆様にも御礼申し上げます。

参考文献

[1] D. Cooper, M. Culler, H. Gillet, D. Long, P. Shalen, *Plane curves associated to character varieties of 3-manifolds*, Invent. Math. **118** (1994), no. 1, 47–84.

[2] E. Finkelstein, *Closed incompressible surfaces in closed braid complements*, J. Knot Theory Ramifications **7** (1998), no. 3, 335–379.

[3] C. Gordon, R. Litherland, *Incompressible surfaces in branched coverings*, The Smith conjecture (New York, 1979), 139–152, Pure Appl. Math., 112, Academic Press, Orlando, FL, 1984.

[4] A. Hatcher, W. Thurston, *Incompressible surfaces in 2-bridge knot complements*, Invent. Math. **79** (1985), no. 2, 225–246.

[5] M. Lozano, *Arcbodies*, Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. **94** (1983), no. 2, 253–260.

[6] M. Lozano, J. Przytycki, *Incompressible surfaces in the exterior of a closed 3-braid I, surfaces with holizontal boundary components*, Math. Proc. Camb. Phil. Soc. **98** (1985), no. 2, 275–299.

[7] K. Morimoto, *Some orientable 3-manifolds containing Klein bottles*, Kobe J. Math. **2** (1985), no. 1, 37–44.

[8] K. Morimoto, J. Schultens, *Tunnel numbers of small knots do not go down under connected sum.* Proc. Amer. Math. Soc. **128** (2000), no. 1, 269–278.

[9] U. Oertel, *Closed incompressible surfaces in complements of star links*, Pacific J. Math. **111** (1984), no. 1, 209–230.

[10] P. Shalen, *The proof in the case of no incompressible surface.* The Smith conjecture (New York, 1979), 21–36, Pure Appl. Math., 112, Academic Press, Orlando, FL, 1984.

[11] F. Waldhausen, *On irreducible 3-manifolds which are sufficiently large.* Ann. of Math. (2) **87** (1968), 56–88.