論文審査の結果の要旨

氏名　松田　浩

3 次元多様体 M に固有に埋め込まれた曲面 $(G.\partial G)$ が圧縮不能であるとは，G の上の可縮でない単純閉曲線は M に埋め込まれたいかなる円板の境界にもならないことを言う．3 次元多様体のトポロジーの研究において，与えられた 3 次元多様体が圧縮不能曲面を含むか否かは，まず調べるべき大切な問題である．多様体が圧縮不能曲面を含めば，それに沿って多様体を切り開き基本的な要素に分解して研究する方法が，W.Haken や F.Waldhausen により確立されている．他方，圧縮不能曲面を含まない多様体の研究方法は確立しておらず，例えば，ある場合には，基本群の表現の指標多様体を調べるなどの特別の方法を必要とする．圧縮不能曲面を含まない多様体はスモールであるという．

結び目理論においても，3 次元多様体のなかの結び目や絡み目の外部がスモールな多様体であるとき，その結び目や絡み目はスモールであるといわれる．多様体の場合と同様に，スモールな結び目や絡み目の研究方法は確立しておらず，しかも，例も少ないという別の困難がある．現在までに，3 次元球面のなかの 2 橋結び目，長さ 3 のモンテシノス結び目，閉 3 次元多様体の中の結び目でその外部が 1 つ穴開きトーラス束の構造を持つものなどがスモール結び目として知られており，これらがスモールであることが知られている結び目のほぼ全部である．

提出された論文の前半では次の定理が証明されている．

定理：　スモール結び目を含むサファイア空間は無限個存在する．しかも，その結び目の補空間には完備双曲構造が入るようにできる．また，こうして得られるスモール結び目は従来型のどのスモール結び目とも一致しない．

サファイア空間は森元勘治により定義された特別な 3 次元多様体であって，次のように構成される．クラインの壷の上の単位区間束で，全空間 M が向き付け可能であるものを考える．全空間 M の境界 ∂M はトーラスであることが知られている．このような M のコピーを 2 つとり，それらを M_1，M_2 とし，それらの境界を微分同相 φ によって張り合わせて得られる 3 次元多様体 M_φ がサファイア空間である．クラインの壷の上の標準的な分離的閉曲線と非分離的閉曲線に沿って，上記の単位区間束は自明になっているので，それらの ∂M_j への持ち上げ Γ_j，Γ'_j が考えられるが，上の定理のサファイア空間は，$\varphi(\Gamma_1) \neq \Gamma_2$，

$\varphi(\Gamma_1) \neq \Gamma'_2$，$\varphi(\Gamma'_1) \neq \Gamma_2$，$\varphi(\Gamma'_1) \neq \Gamma'_2$ という特別の条件を満たす φ によって張り合わせて得られるサファイア空間である．また，定理にいう結び目は M_1 と M_2 のなかの単位区間ファイバーを両端点でつないだものが一番簡単な例になっている．

サファイア空間は圧縮不能なトーラスを含み，かつ既約である．このような3次元多様体に含まれる結び目は，多くの場合，スモールでないことが予想される．実際，圧縮不可能な曲面を含み，かつ既約であるような3次元多様体であって，そのなかに含まれる全ての結び目がスモールでないような多様体の例をL.M.LopezやA.Reidが構成している．このことからも分かるように，上記定理で述べられた状況において，ある結び目がスモールであることを証明するには相当に困難な議論を必要とする．

論文の後半では3次元球面のなかの5成分のスモールな絡み目を閉4糸組みひもを用いて構成している．これも，従来知られていないスモール絡み目の例である．

以上のように，論文提出者は，結び目理論と3次元多様体論に特有の精緻な議論を積み上げることによって，スモールな結び目と絡み目の多くの例の構成に成功し，この方面の研究に新生面を切り開いたということができる．

よって，論文提出者　松田　浩　は，博士（数理科学）の学位を受けるに十分な資格があると認める．