論文の内容の要旨

論文題目: Mathematical Study of Quantum Mechanical Problems

(和訳: 量子力学のいくつかの問題の数学的研究)

氏名: Galtbayar Artbazar

本論文では、量子力学に関連する2つの問題を考える。

1 光子数2より小さいNelsonモデルについて

第1部では，場の量子論の1つのモデルであるNelsonモデルを考える．光子数は2より小さいとする．このモデルは，ボゾン場における非相対論的粒子の相互作用の系をあらわす．このとき，ハミルトニアンはHilbert空間

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_0 \oplus \mathcal{H}_1, \quad \mathcal{H}_0 = L^2(\mathbf{R}_x^3), \quad \mathcal{H}_1 = L^2(\mathbf{R}_x^3) \otimes L^2(\mathbf{R}_k^3)$$

上の作用素として，次のように与えられる．

$$H = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}\triangle + V & \mu\langle g| \\ \mu|g\rangle & -\frac{1}{2}\triangle + V + \omega(k) \end{pmatrix},$$

ここで，$-\frac{1}{2}\triangle + V$ はSchrödinger作用素で，$V(x)$ は電子と原子核の相互作用に対するポテンシャルである．$\omega(k) = \sqrt{k^2 + m^2}$ で，$m \geq 0$ は光子の質量，$\mu > 0$ は定数とする．

電子と光子の相互作用を表わす作用素 $|g\rangle : \mathcal{H}_0 \to \mathcal{H}_1$ と $\langle g| : \mathcal{H}_1 \to \mathcal{H}_0$ は次のように定義する：

$$(|g\rangle u_0)(x,k) = g(x,k)u_0(x), \qquad (\langle g|u_1)(x) = \int_{\mathbf{R}^3} \overline{g(x,k)} u_1(x,k)dk.$$

ここで $g(x,k) = \frac{\chi(k)e^{-ixk}}{\sqrt{\omega(k)}}$. $\chi(k)$ は，運動量切断である．$\chi(k)$ を滑らかな正値球対称な関数とし， $|k| \to \infty$ で単調減少すると仮定する．さらにある十分大きな N に対して $|\chi(k)| \le C\langle k\rangle^{-N}$ が成り立つとする．$H^2(R^3)$ を次数 2 の Sobolev 空間 とするとき，$-\frac{1}{2}\Delta + V$ は定義域が $D(H) = H^2(R^3)$ である自己共役作用素であるとを仮定する．また，$V(x) \equiv 0$ であるとき H を H_0 と書く．すると， H は定義域が

$$D(H) = D(H_0) = H^2(\mathbf{R}^3) \oplus (H^2(\mathbf{R}^3) \otimes L^2(\mathbf{R}^3) \cap L^2(\mathbf{R}^3) \otimes L^2_1(\mathbf{R}^3)),$$

である自己共役作用素になる．ここで，$L^2_1(\mathbf{R}^3)$ は重み付き L^2 空間とする：$L^2_1(\mathbf{R}^3) = L^2(\mathbf{R}^3, \langle k\rangle dk)$.

このモデルでの主たる問題は関連するハミルトニアンの基底状態の一意存在と，propagator の漸近挙動である．この問題に関連したいくつかの問題は，[MS], [DG], [FGS] で研究されている．原子のハミルトニアンが confined の場合には，基底状態の一意存在と漸近完全性が [MS],[DG] によって得られている．[FGS] では，エネルギーをある値で上から切断する条件のもとで，原子のハミルトニアンが N 体の Schrödinger 作用素であるときの，Rayleigh 散乱の漸近完全性が示されている．

本論文の内容は以下のとおりである．第 2 節では，いくつかの記号の導入と，後節で必要なものの定義をする．第 3 節では，H_0 のレゾルベントに対して，極限吸収原理を使うために重要な役割を果たす関数 $F(z,\xi)$ の性質を調べる．第 4 節では，H_0 のスペクトルとレゾルベントを調べる．第 5 節では，この論文の主要な結果として，e^{-itH_0} の詳しい挙動について述べる．第 6 節では，いくつかの単純なチャネルハミルトニアンについての波動作用素の存在を証明する．第 7 節では，前節までに得られた結果を用いて，波動作用素 $W_{0\pm} = s - \lim_{t\to\pm\infty} e^{itH}e^{-itH_0}$ の存在を証明する．

2 時間周期的な系に対する局所時間減衰について

時間周期的な実数値のポテンシャルをもつ，時間依存型 Schrödinger 方程式

$$\begin{cases} i\dfrac{\partial u}{\partial t} = (-\Delta + V(x,t))\,u, \ (x,t) \in R^3 \times R, \\ u(x,0) = u_0(x), \end{cases} \tag{2.1}$$

を考える．ここで，ポテンシャル V は $V(t,x) = V(t+2\pi, x)$ をみたす．$T = R/2\pi Z$ とする．ポテンシャルは，次の条件をみたすとする．

$$\textbf{(A1)}\ \frac{\partial^k V}{\partial t^k}(t,\cdot) \in L^2(T, L^2(R^3) \cap L^\infty_\beta), \ 0 \le k \le 3, \quad \beta > 5. \tag{2.2}$$

ここで，$L^p_\beta = \{f \in L^p_{loc}(R^3) : \|\langle x\rangle^\beta f\|_{L^p} < \infty\}$,　$\langle x\rangle = (1+x^2)^{1/2}$ である．条件 (2.2) のもとで，$L^2(R^3)$ 上 (2.1) の unitary propagator $\{U(t,s) : -\infty < t \leq s < \infty\}$ が一意に存在することが知られている ([Y2]).

この論文では，対応する Floquet Hamiltonian

$$K = -i\frac{\partial}{\partial t} - \Delta + V(x,t) \text{ in } \mathcal{K} = L^2(T; L^2(R^3)), \tag{2.3}$$

が生成する propagator を用いて，(2.1) の解の漸近挙動を調べる．自由な Floquet Hamiltonian K_0 は，$-i\frac{\partial}{\partial t} - \Delta$ の最大作用素で，定義域は $D(K_0) = \{u \in \mathcal{K} : (-i\frac{\partial}{\partial t} - \Delta)u \in \mathcal{K}\}$ である．ここで，微分は超関数の意味とする．

$V(t,x)$ は有界な摂動であるから，K は定義域が $D(K) = D(K_0)$ である自己共役作用素である．K_0 と K が生成するユニタリ群と propargator $U(t,s)$, $e^{it\Delta}$ の間には，次のような関係がある．

$$e^{-i\sigma K}u(t) = U(t, t-\sigma)u(t-\sigma), \quad e^{-i\sigma K_0}u(t) = e^{i\sigma\Delta}u(t-\sigma), t \in T.$$

さらに，t によらない $u(x), v(x)$ に対して，次に等式が成立する．

$$\langle e^{-i\sigma K}u, v\rangle_{\mathcal{K}} = \int_0^{2\pi} \langle U(t+\sigma, t)u, v\rangle_{L^2} dt. \tag{2.4}$$

このことから，$e^{-i\sigma K}$ の $\sigma \to \infty$ のときの時間減衰から，$U(t,s)$ の時間減衰を得ることができると予想される．

K に対して，次のことを仮定する．

(A2) K は整数でない固有値をもたないとする．

定義　$s > 1/2$ に対して $\langle x\rangle^s u(x,t) \in \mathcal{K}$ をみたす $(K-n)u = 0$ の解が存在するとき，$n \in Z$ は K の resonance であるという．

定義　整数の K の固有値や resonance が存在しないとき、$V(t,x)$ は generic であるという．それ以外のとき，$V(t,x)$ は exceptional であるという．

この論文の主結果は，以下の定理である．(これらの定理で使われている記号は，本文を参照のこと．)

定理　V は *generic* であるとする．$(A1), (A2)$ が $\delta > 5/2$, $\beta > 2\delta$, $u_0(x) \in L^2_\delta(R^3)$ に対して成立するとする．　このとき，$\mathcal{K}_{-\delta}$ 上で次の展開が成り立つ．

$$\begin{aligned} e^{-i\sigma K}u_0 &= C_0\sigma^{-3/2} \sum_{n\in Z} e^{-i\sigma n}\left[-G^+(n)(P_n \otimes G_1)VG^+(n)\right]u_0 \\ &+ \quad C_0\sigma^{-3/2}G^+(0)G_1u_0 + \Theta(\sigma^{-3/2}). \end{aligned} \tag{2.5}$$

ここで，$\|\Theta(\sigma^{-3/2})\|_{\mathcal{K}_{-\delta}} = o(\sigma^{-3/2})$ $(\sigma \to \infty)$, $C_0 = \frac{1}{2\sqrt{\pi}}e^{i\pi/4}$ である．

定理　V は exceptional であるとする．$(A1),(A2)$ が $\delta > 15/2, \beta > 2\delta+3/2$, $u_0(x) \in L^2_\delta(R^3)$ に対して成立するとする．このとき，$\mathcal{K}_{-\delta}$ 上で次の展開が成り立つ．

$$\begin{aligned} e^{-i\sigma K}u_0 &= \sum_{n\in Z} e^{-in(\sigma-t)}\left[\bar{P}_0(e^{-itn}u_0)\right] \\ &- \left(2iC_0\sigma^{-1/2}+C_1\sigma^{-3/2}\right)\sum_{n\in Z} e^{-in(\sigma-t)}\left[\bar{Q}_0+\bar{P}_0VD_3^{(0)}V\bar{P}_0(e^{-itn}u_0)\right] \\ &+ C_0\sigma^{-3/2}\sum_{n\in Z} e^{-in(\sigma-t)}\sum_{j=-2}^{1}\left[B_j^{(0)}D_{1-j}^{(0)}(e^{-itn}u_0)\right]+\Theta(\sigma^{-3/2}), \end{aligned} \tag{2.6}$$

ここで，$\|\Theta(\sigma^{-3/2})\|_{\mathcal{K}_{-\delta}} = o(\sigma^{-3/2})$ $(\sigma\to\infty)$, $C_0 = \frac{1}{2\sqrt{\pi}}e^{i\pi/4}$ である．

参考文献

[DG] J. Derezinski and C. Gerard, *Asymptotic completeness in Quantum Field Theory. Massive Pauli-Fierz Hamiltonians*, Rev. Math. Phys. **11** No 4. (1999), 383-450.

[FGS] J. Fröhlich.,M.Griesemer and B.Schlein, *Asymptotic completeness for Rayleigh Scattering*, 2001, Preprint.

[MS] R. Minlos and H. Spohn, *The three-body problem in radioactive decay: The case of one atom and at most two photons*, Amer. Math. Soc. Transl. (2) **177** (1996), 159-193. Academic Press, New York, 1975.

[Y2] K.Yajima. *Existence of Solutions for Schrödinger Evolution Equations*, Commun. Math. Phys. **110** (1987), 415-426.