論文審査の結果の要旨

氏　名　Galtbayar Artbazar

本論文では量子力学における２つの数学的問題, すなわち非相対論的場の量子論における Nelson モデルの光子数 < 2 の領域における散乱理論と, 時間に周期的に依存するポテンシャルをもつシュレーディンガー方程式の解の時間 $\to \infty$ における局所減衰の問題が取り扱われている。

散乱理論を構成することは場の量子論における基本的であるが困難な問題として知られている. Minlos-Spohn や Derezinski-Gérard の論文では電子が束縛状態のみをもつ場合に, また Fröhlich-Griesmer-Schlein ではエネルギーを制限して漸近場の理論の枠で散乱理論の完備性が示されているが, この様な制限なしでは数学的に厳密な結果は殆どない. この論文の第一部では粒子数を最も簡単な場合に制限して, Nelson モデルを光子数 < 2 の部分空間

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_0 \oplus \mathcal{H}_1, \quad \mathcal{H}_0 = L^2(\mathbf{R}^3_x), \quad \mathcal{H}_1 = L^2(\mathbf{R}^3_x) \otimes L^2(\mathbf{R}^3_k)$$

に射影した作用素

$$H = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}\triangle + V & \mu\langle g| \\ \mu\rangle g| & -\frac{1}{2}\triangle + V + \omega(k) \end{pmatrix}$$

をとりあげ, H によって生成される時間発展 e^{-itH} に $t \to \pm\infty$ における漸近挙動を解析している。ここで, $\omega(k) = \sqrt{k^2 + m^2}$, $m \geq 0$ はボゾンの質量, V は電子・核の相互作用のポテンシャル, $\mu > 0$ は coupling constant, $|g\rangle : \mathcal{H}_0 \to \mathcal{H}_1$, $\langle g| : \mathcal{H}_1 \to \mathcal{H}_0$ は電子とボゾンの相互作用を記述する作用素で紫外切断の関数 $\chi(k)$ を用いて

$$(|g\rangle u_0)(x,k) = \frac{\chi(k)e^{ikx}}{\sqrt{\omega(k)}} u_0(x) \quad (\langle g|u_1)(x) = \int \frac{\chi(k)e^{ikx}}{\sqrt{\omega(k)}} u_1(x,k)dk,$$

である. $\chi \in C^\infty$ は球対称, 単調減少で $|k| \to \infty$ で十分速く 0 に収束すると仮定する.

$$F(\xi, z) = \frac{1}{2}\xi^2 - z - \int \frac{\mu^2 |g(k)|^2 dk}{\frac{1}{2}(\xi - k)^2 + \omega(k) - z}$$

と定義する. $\gamma(\xi)=\inf\{\frac{1}{2}(\xi-k)^2+\omega(k):k\in\mathbf{R}^3\}$ とすると, $F(\xi,\lambda)$ は領域 $\lambda=\mathrm{Re}\, z<\gamma(\xi)$ において実解析的で, ある $\rho_c>0$ が存在して $F(\xi,\lambda)=0$ は, $|\xi|<\rho_c$ の時一意的な解 $\lambda=\lambda(\xi)$ をもつが $|\xi|>\rho_c$ では解をもたない. 第一部の主定理は次のようである. $V\in L^2(\mathbf{R}^3)\cap L^\infty(\mathbf{R}^3)$ と仮定する. $V=0$ の時の H を H_0 と書く.

定理 1 (1) 任意の $\mathbf{u}_0=(u_0,u_1)\in\mathcal{H}$ に対して, $v_1\in\mathcal{H}_1$ と, $\hat{v}_0$ が $|\xi|<\rho_c$ に台をもつ $v_0\in\mathcal{H}_0$ が存在して, $t\to\infty$ の時

$$\left\| e^{-itH_0}\mathbf{u}_0-\begin{pmatrix} e^{-it\lambda(D_x)}v_0 \\ \mu g(k)e^{ikx}e^{-it\lambda(D_x)}\tilde{v}_0(x,k)+e^{-it(-\frac{1}{2}\Delta+\omega(k))}v_1\end{pmatrix}\right\|\to 0$$

となる. ただし, $\tilde{v}_0(x,k)=(\frac{1}{2}(D-k)^2+\omega(k)-\lambda(D))^{-1}v_0(x)$ である.
(2) $\mathcal{H}$ における強極限 $\lim\limits_{t\to\infty}e^{itH}e^{-itH_0}$ が存在する.
(3) $\Omega(x)$ を $-\frac{1}{2}\Delta+V$ の固有値 E の固有関数とする. 任意の $f\in L^2(\mathbf{R}^3_k)$ に対して $\mathcal{H}$ における次の極限が存在する:

$$\lim_{t\to\pm\infty}e^{itH}\begin{pmatrix} 0 \\ e^{-itE-it\omega(k)}\Omega(x)f(k)\end{pmatrix}=W_\pm^{E,\Omega}f.$$

H_0 に対しては時間的な漸近挙動をレゾルベントの境界値の研究と停留位相法を用いて詳細に調べる. 波動作用素の存在はこれと黒田の方法で得られる. この定理によって次の段階の完全性の研究のための基礎を作り上げたといえる.

第二部では $|x|\to\infty$ において十分速く減少し, t に関して十分滑らかで 2π 周期的ポテンシャル $V(t,x)$ をもつシュレーディンガー方程式の初期値問題

$$\begin{cases} i\partial_t u=(-\Delta+V(x,t))\,u,\ (x,t)\in\mathbf{R}^3\times\mathbf{R}, \\ u(x,0)=u_0(x), \end{cases} \tag{1}$$

の解の $t\to\pm\infty$ における局所減衰の問題をいわゆる拡張相空間の定式化によって論じている. $U(t,s)$ を (1) の生成する発展作用素とするとき, 拡張相空間 $\mathcal{K}=L^2(\mathbf{T},L^2(\mathbf{R}^3))$, $\mathbf{T}=\mathbf{R}/2\pi\mathbf{Z}$, 上のユニタリ群 $\mathcal{U}(\sigma)$ を $\mathcal{U}(\sigma)u(t)=U(t,t-\sigma)u(t-\sigma)$ によって定義し, その生成作用素を K とする.

$$K=-i\partial_t-\Delta+V(x,t)$$

で, $e^{-i2\pi iK}$ は $I\otimes U(2\pi,0)$ とユニタリ同値である. $\mathcal{U}(2n\pi)=U(2n\pi+t,t)$ であるから, $t\to\infty$ での解の漸近挙動の研究は $\mathcal{U}(\sigma)$ の $\sigma\to\infty$ での挙動の研究とほぼ同値である. K は整数値以外に固有値をもたないと仮定する.

定義 2 n は $-i\partial_t u - \Delta u + V(x,t)u = nu(t,x)$ の解で

$$u(t,x) = \frac{ce^{-int}}{|x|} + u_1(t,x), \quad u_1 \in \mathcal{K}, \quad c \neq 0$$

をみたす解が存在する時, レゾナンスであるという. $e^{-int}Ke^{int} = K + n$ だから n がレゾナンス, 固有値であることと 0 がレゾナンス, 固有値であることは同値である.

$L^2_\beta(\mathbf{R}^3)$ を重み付き L^2 空間, $\mathcal{K}_\beta = L^2(\mathbf{T}, L^2_\beta(\mathbf{R}^3))$ とする. 第二部での主定理は次のようである. $x \in \mathbf{R}^3$ の関数 u_0 に対して $(Ju_0)(t,x) = u_0(x)$ とする.

定理 3 (1) $\beta > 2\delta > 5$ とする. $\mathbf{Z}$ がレゾナンスでも固有値でもないとする. $u_0 \in L^2_\delta$ の時, $\mathcal{K}_{-\delta}$-値関数としての $\sigma \to \infty$ における漸近展開

$$e^{-i\sigma K} Ju_0 = \sigma^{-3/2} \left(\sum_{n \in Z} e^{-i\sigma n} B(n) \right) Ju_0 + o(\sigma^{-2-\varepsilon}) \tag{2}$$

が成立する. ただし, $B(n)$ はその像空間が $\{e^{int}\}$ に等しい階数 1 の作用素で $\|B(n)\| \le C\langle n \rangle^{-3}$ をみたす.
(2) $\mathbf{Z}$ がレゾナンスあるいは固有値の時には, $\mathcal{K}_{-\delta}$-値関数としての漸近展開

$$e^{-i\sigma K} Ju_0 = \sum_{n \in Z} e^{-in\sigma} \left(P_n Ju_0 + \sigma^{-1/2}(C_{1n} + \tilde{C}_{1n}) + \sigma^{-3/2} D_n \right) + o(\sigma^{-3/2}),$$

が成立する. ただし P_n は K の n 固有空間への射影, C_{1n} は n レゾナンス関数を値域とする階数 1 の作用素, C_{2n} は n 固有関数を像とする有限次元作用素, D_n も有限次元作用素である.

時間周期系の一般の解の局所減衰の漸近展開を得たのはこの論文が最初である. 拡張相空間を用いて, 減少度をいわゆる Floquet 作用素のスペクトル論的な概念を用いて特徴付ける着想は独創的である. いわゆる時間的方法によってこの様な特徴付けをするのは困難のように思われる. またこのような設定によって, 既存の定常ポテンシャルに関する加藤・Jensen あるいは村田実などの理論と, 時間周期系を統一的に論ずることを可能にしたのは重要である. よって, 論文提出者 Galtbayar Artbazar は、博士（数理科学）の学位を受けるにふさわしい充分な資格があると認める.