論文の内容の要旨

論文題目「Schrödinger Equations with Potentials Superquadratic at Infinity: Local Smoothing Properties and Strichartz Inequality and Its Applications to Nonlinear Schrödinger Equations」

「無限遠で優二次的なポテンシャルをもつシュレーディンガー方程式について: 局所平滑化作用とストリッカーズ不等式及びその非線形シュレーディンガー方程式への応用」

氏名： 張　果平

本論文は，無限遠で優二次的なポテンシャルをもつシュレーディンガー方程式の局所平滑化作用，Strichartz 不等式とその非線形シュレーディンガー方程式に対する初期値問題への応用に関するものである。

$\mathbb{R}^n$ 上の時間依存型シュレーディンガー方程式に対する初期値問題

$$\begin{cases} i\dfrac{\partial u}{\partial t} = (-\dfrac{1}{2}\Delta + V(x))u, & x \in \mathbb{R}^n,\ t \in \mathbb{R}, \\ u(0,x) = u_0(x), & x \in \mathbb{R}^n, \end{cases} \tag{0.1}$$

を考える。ただしポテンシャル $V(x)$ に対して次を仮定する。

$$V(x) \geq C\langle x\rangle^{2+\varepsilon}, \quad \varepsilon > 0, \quad \text{as} \quad |x| \to \infty. \tag{0.2}$$

(0.2) を満たす V は無限遠で優二次的なポテンシャルと呼ばれている。

第 1 章は Introduction である。この研究の背景と動機について簡単に解説する。$H_0 = -\frac{1}{2}\Delta$ は自由シュレーディンガー作用素とする。

(1) Strichartz 不等式: $0 \leq \dfrac{2}{\theta} = n\left(\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{p}\right) \leq 1$ と $n = 2$ の時, $p \neq \infty$ を満たす (p,θ) に対して，ある定数 $C > 0$ が存在して，

$$\left(\int_0^\infty \|e^{-itH_0}u_0\|_p^\theta dt\right)^{\frac{1}{\theta}} \leq C\|u_0\|_2, \quad u_0 \in L^2(\mathbb{R}^n). \tag{0.3}$$

が成り立つ。

(2)　局所平滑化作用: 任意の $T > 0$ と $\Psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ に対して，ある定数 $C > 0$ が存在して，

$$\left(\int_0^T \|\Psi(x)\langle D\rangle^{\frac{1}{2}}e^{-itH_0}u_0\|_2^2dt\right)^{\frac{1}{2}} \leq C\|u_0\|, \quad u_0 \in L^2(\mathbb{R}^n), \tag{0.4}$$

が成り立つ。ここで T は $n\geq 3$ の時，$T=\infty$ にしてよい。$D=(D_1,\ldots,D_n)$, $D_j=-i\partial/\partial x_j$ で，自己共役作用素 A に対して $\langle A\rangle=(1+|A|^2)^{\frac{1}{2}}$ とおいた。

$|V(x)|\leq C|x|^2$ を満たすポテンシャル V に対しても (0.3) と (0.4) は成り立つ。しかし．ポテンシャルが無限遠方において優二次的である場合には, (0.3) や (0.4) のような評価は知られてないようである。この事実は, 方程式 (0.1) の基本解, すなわち発展作用素 e^{-itH} の超関数核 $E(t,x,y)$ の滑らかさあるいは有界性がポテンシャルの無限遠方での増大度が $C|x|^2$ を通過するとき劇的な転移をするということに関係していると思われる: すなわち, $V(x)=o(|x|^2)$ のとき $E(t,x,y)$ はすべての $t\neq 0$ において滑らかで, 空間的に有界, $V(x)=O(\langle x\rangle^2)$ の時には少なくとも小さい時間において同じ事が成立するのであるが, $V(x)\geq C\langle x\rangle^{2+\varepsilon}$, $\varepsilon>0$, の場合には $E(t,x,y)$ はいかなる点の近傍において C^1 級にはならず, また空間的にも有界でない場合もある。実際，評価式 (0.3) は $|t|$ が小さいときの基本解に対する評価 $|E(t,x,y)|\leq C|t|^{-n/2}$ の帰結であり, (0.4) は $x(t)=e^{itH}xe^{-itH}$ をハイゼンベルグ描像における位置作用素として, $\displaystyle\int_{-T}^{T}\Phi^2(x(t))dt$ が -1 階の擬微分作用素であることから得られるのであるが，これらの性質は上に述べた基本解の性質から明らかなようにポテンシャルが優二次的の場合には成立しない。われわれのこの研究の動機はこの $E(t,x,y)$ に対する滑らかさと有界性に関する性質の変化が方程式 (0.1) に対する平滑化作用にも遺伝するか？を調べることにあった。

第 2 章では一次元空間 $\mathbb{R}$ 上の時間依存型シュレーディンガー方程式に対する初期値問題を考える。まず, Langer's turning point 理論を用いてシュレーディンガー作用素の正規化された固有関数の漸近挙動を解析し，その L^p-ノルムの最良の評価を得た。

定理 2.1.5 $V(x)\sim|x|^m$ と適当な仮定を満たすとする。$\psi(x,E)$ は $H=-\frac{1}{2}\triangle+V(x)$ の固有値 E に対する正規化された固有関数とする。この時，次のことが成立する。

(1) コンパクト区間 $K\subset\mathbb{R}$ と十分大きな E に対して, $\sup\limits_{x\in K}|\psi(x,E)|\sim E^{-\frac{1}{2m}}$.

(2) $1\leq p\leq\infty$ と十分大きな E に対して

$$\|\psi(x,E)\|_{L^p}\sim\begin{cases} C_pE^{-\theta(m,p)}, & \text{if} \quad p\neq 4;\\ CE^{-\frac{1}{4m}}(\log E)^{\frac{1}{4}}, & \text{if} \quad p=4,\end{cases} \tag{0.5}$$

ここで $p\notin(4-\varepsilon,4+\varepsilon)$, $\varepsilon>0$ 　であれば，C_p は p によらずにとれる。

$$\theta(m,p)=\begin{cases}\dfrac{1}{m}\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{p}\right), & \text{if} \quad 2\leq p<4;\\ \dfrac{1}{4}-\dfrac{1}{3}\left(1-\dfrac{1}{p}\right)\left(1-\dfrac{1}{m}\right), & \text{if} \quad 4<p\leq\infty,\end{cases}$$

定理 2.1.5 と時間変数についての Fourier 変換を用いて次の二つの局所平滑化作用を得た。定理 2.1.2 と 2.1.3 において時間変数 t と空間変数 x に対する積分の順序はと (0.3)，(0.4) 異なることに注意。

定理 2.1.2 – 2.1.3 $V(x)$ は $V(x)\sim|x|^m$ でさらに適当な仮定を満たすとする。$2\leq p\leq\infty$ とする。任意の $T>0$ とコンパクト区間 $K\subset\mathbb{R}$ に対して，ある定数 $C_T>0$ が存在して,

$$\|\langle H\rangle^{\theta(m,p)}e^{-itH}u_0(x)\|_{L^p(\mathbb{R}_x,L^2([-T,T]_t))}\leq C_T\|u_0\|_{L^2(\mathbb{R}_x)}, \tag{0.6}$$

$$\sup_{x\in K}\|\langle H\rangle^{\frac{1}{2m}}e^{-itH}u_0(x)\|_{L^2([-T,T])}\le C_T\|u_0\|_{L^2(\mathbb{R}_x)} \tag{0.7}$$

が成り立つ。

第3章はn次元空間$\mathbb{R}^n$上の時間依存型シュレーディンガー方程式に対する初期値問題を考える。Hörmanderの擬微分作用素の理論と振動積分の理論を合わせて，すべての空間次元において Strichartz 不等式 (定理 3.1.3) を証明することができる。

定理 3.1.3 $V(x)$ は $V(x)\sim|x|^m$ でさらに適当な仮定を満たすとする。$0\le\dfrac{2}{\theta}=n\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{p}\right)\le 1$ と $n=2$ のとき，$p\neq\infty$ とする。任意の $T>0$ と $\gamma>\frac{1}{\theta}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{m}\right)$ に対して，ある定数 $C_\gamma>0$ が存在して，

$$\left(\int_{-T}^{T}\|e^{-itH}u_0\|_p^\theta dt\right)^{\frac{1}{\theta}}\le C\|\langle H\rangle^\gamma u_0\|,\quad u_0\in L^2(\mathbb{R}^n). \tag{0.8}$$

が成り立つ。

次に，h-擬微分作用素の理論を用いて，局所平滑化作用 (Theorem 3.1.2) を得た。

定理 3.1.2 $V(x)$ は $V(x)\sim|x|^m$ でさらに適当な仮定を満たすとする。任意の $T>0$ と $\Psi\in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ の対して，ある定数 $C_T>0$ が存在して，

$$\left(\int_{-T}^{T}\|\Psi(x)\langle H\rangle^{\frac{1}{2m}}e^{-itH}u_0\|_2^2dt\right)^{\frac{1}{2}}\le C\|u_0\|,\quad u_0\in L^2(\mathbb{R}^n). \tag{0.9}$$

が成り立つ。

第4章は第2章と第3章の結果を非線形シュレーディンガー方程式へ応用するための準備である。$V(x)$ は $V(x)\sim|x|^m$ でさらに適当な仮定を満たすとする，Hörmander の擬微分作用素の理論を用いて，定理 4.1.1 を証明することができる。すなわち，$1<p<\infty$ に対して，

$$\|H^{s/2}u\|_{L^p}\sim\|\langle D\rangle^s u\|_{L^p}+\|\langle x\rangle^{ks/2}u\|_{L^p}),\quad u\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^n). \tag{0.10}$$

が成立する。dyadic decomposition を用いて，the fractional derivatives の Leibniz's rule (命題 4.2.3) を証明した。$\mathcal{L}'(\mathbb{R}^n)\equiv\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)/\mathcal{P}$ とおく ($\mathcal{P}$ は $\mathbb{R}^n$ 上の多項式環である)。

命題 4.2.3 $F\in C(\mathbb{C}^m;\mathbb{C})$. 任意の $\xi,\eta\in\mathbb{C}^m$ に対して，

$$|F(\xi)-F(\eta)|\le\sum_{l=1}^m(G_l(\xi)+G_l(\eta))|\xi_l-\eta_l|$$

が成立すると仮定する。

$0<\alpha<1, 1<p\le\infty, 1<q,r<\infty$, $\frac{1}{r}=\frac{1}{p}+\frac{1}{q}$ と $\vec{\mathbf{u}}=(u_1,\cdots,u_m)$ とする。$l=1,\cdots,m$, $u_l(x),F(\vec{\mathbf{u}})\in\mathcal{L}'(\mathbb{R}^n)$, $|D|^\alpha u_l(x)\in L^q(\mathbb{R}^n)$ and $G_l(\vec{\mathbf{u}}(x))\in L^p(\mathbb{R}^n)$ と仮定する。このとき, $|D|^\alpha F(\vec{\mathbf{u}}(x))\in L^r(\mathbb{R}^n)$ である。さらに,

$$\||D|^\alpha F(\vec{\mathbf{u}})\|_{L^r(\mathbb{R}^n)}\le C\sum_{l=1}^m\|G_l(\vec{\mathbf{u}})\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}\||D|^\alpha u_l\|_{L^q(\mathbb{R}^n)}, \tag{0.11}$$

が成り立つ。

前述の結果の応用として非線形シュレーディンガー方程式に対する初期値問題

$$\begin{cases} i\dfrac{\partial u}{\partial t}=-\dfrac{1}{2}\triangle u+V(x)u+f(x,u), & x\in\mathbb{R}^n,\ t\in\mathbb{R},\\ u(0,x)=u_0(x), & x\in\mathbb{R}^n\end{cases} \tag{0.12}$$

を考える。

第5章では初期値問題 (0.12) の解の適切性を研究する。 局所平滑化作用の応用として次の結果を得た。

定理 5.2.3 $V(x)$ は $V(x) \sim |x|^m$ でさらに適当な仮定を満たすとする。$1 \le r \le \dfrac{mn}{mn-1}$ とする。$f(x,u)$ は次の条件を満たすとする。

(1) あるコンパクト集合 $L \subset \mathbb{R}^n$ が存在して，$x \notin L$ ならば，$f(x,u) = 0$ である。

(2) ある定数 C が存在して，

$$\begin{aligned} &|f(x,u)| \le C|u|^r, && x \in \mathbb{R}^n,\ u \in \mathbb{C}, \\ &|f(x,u) - f(x,v)| \le C|u-v|(|u|^{r-1} + |v|^{r-1}), && x \in \mathbb{R}^n,\ u,v \in \mathbb{C}. \end{aligned} \tag{0.13}$$

が成り立つ。この時，任意の $L \subset K$ を満たすコンパクト集合 K と $u_0 \in L^2(\mathbb{R}^n)$ に対して，ある定数 $\delta > 0$ が存在して，初期値問題 (0.12) は $L^2([-\delta,\delta]; L^{2r}(K)) \cap C([-\delta,\delta]; L^2(\mathbb{R}^n_x))$ において局所的に適切である，すなわち, 適当な $\delta > 0$ が存在し，(0.12) は $L^2([-\delta,\delta]; L^{2r}(K)) \cap C([-\delta,\delta]; L^2(\mathbb{R}^n_x))$ にただ一つの解 $u(t,x)$ をもち, 写像 $L^2(\mathbb{R}) \ni u_0 \mapsto u \in L^2([-\delta,\delta]; L^{2r}(K)) \cap C([-\delta,\delta]; L^2(\mathbb{R}^n_x))$ は連続である. さらに f が

$$f(x,u)\overline{u} \ \text{ is real for } x \in \mathbb{R}^n, \quad u \in \mathbb{C}, \tag{0.14}$$

をみたせば (0.12) は $L^2_{loc}(\mathbb{R}; L^{2r}(K)) \cap C(\mathbb{R}; L^2(\mathbb{R}^n_x))$ において時間大域的に適切である. すなわち, 解 $u(t,x)$ は $t \in \mathbb{R}$ 全体に一意的に延長され, 写像 $L^2(\mathbb{R}^n) \ni u_0 \mapsto u \in L^2([-T,T]; L^{2r}(K)) \cap C([-T,T]; L^2(\mathbb{R}^n_x))$ は任意の $T > 0$ に対して連続である.

Strichartz 不等式によって，次の定理を証明することができる。s より小さくない最小の整数を s_* と書く。

定理 5.2.10 $V(x) \sim |x|^m$ と適当な仮定を満たすとする。$0 \le s < \infty$, $1 \le r < \infty$ と $s_* \le r$. $f(x,u) = \lambda(x)F(u)$ で λ, F は次の条件を満たすとする。

(i) $\lambda(x) \in C_b^{s_*}(\mathbb{R}^n)$;

(ii) $|\gamma| \le s_*$ になる $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2) \in \mathbb{N}^2$ に対して，ある定数 C_γ が存在して

$$|\partial^\gamma F(u)| \le C_\gamma |u|^{r-|\gamma|},$$

ここで $|\gamma| = \gamma_1 + \gamma_2$ と $\partial = (\partial_u, \partial_{\bar{u}})$.

つまり，(θ, p) は

$$0 \le \frac{2}{\theta} = n(\frac{1}{2} - \frac{1}{p}) \le 1; \qquad p \ne \infty, \quad \text{if } n = 2,$$

$$\theta > r - 1, \quad s > \frac{n}{2} - \frac{2}{\theta}(\frac{1}{2} + \frac{1}{m}),$$

$$\frac{n}{2} - \frac{2}{\theta} < \sigma < s - \frac{2}{\theta}(\frac{1}{2} - \frac{1}{m}).$$

を満たすとする。このとき，任意の $u_0 \in \mathcal{H}^s(\mathbb{R}^n)$ に対して，ある $\delta > 0$ が存在して，初期値問題 (0.12) は $C([0,\delta; \mathcal{H}^s(\mathbb{R}^n)) \cap L^\theta([0,\delta]; \mathcal{W}^{\sigma,p}(\mathbb{R}^n))$ にただ一つの解 $u(t,x)$ をもち，写像 $\mathcal{H}^s(\mathbb{R}^n) \ni u_0 \mapsto u \in C([0,\delta; \mathcal{H}^s(\mathbb{R}^n)) \cap L^\theta([0,\delta]; \mathcal{W}^{\sigma,p}(\mathbb{R}^n))$ は連続である.

最後の第6章は第4章の結果を用いて ((0.10) と命題 4.2.3), 第5章に得た初期値問題 (0.12) の解の regularity を研究する。