論文審査の結果の要旨

氏 名 張 果 平

シュレーディンガー方程式の初期値問題

$$\begin{cases} i\dfrac{\partial u}{\partial t} = (-\dfrac{1}{2}\triangle + V(x))u, & x \in \mathbf{R}^n,\ t \in \mathbf{R}, \\ u(0,x) = u_0(x), & x \in \mathbf{R}^n, \end{cases} \tag{1}$$

を考える. $V \in C^\infty$ で, ある $C > 0$ に対して $V(x) \geq -C\langle x\rangle^2$ ならば, (1) は $L^2(\mathbf{R}^n)$ でただ一つの解 $u(t,\cdot) = e^{-itH}u_0$ を持つ. ただし, H は (1) の右辺の作用素が決める自己共役作用素で, e^{-itH} は H が生成するユニタリ群である. V が $|\partial^\alpha V(x)| \leq C_\alpha$, $|\alpha| \geq 2$ をみたす時, すなわち, V が高々二次関数的にしか増大しない時, e^{-itH} は次の二つの不等式をみたすことがよく知られている:

Strichartz の不等式: $0 \leq \dfrac{2}{\theta} = n\left(\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{p}\right) \leq 1$, ただし $n = 2$ の時は $p \neq \infty$, の時, ある定数 $C > 0$ が存在して,

$$\left(\int_0^\infty \|e^{-itH_0}u_0\|_p^\theta dt\right)^{\frac{1}{\theta}} \leq C\|u_0\|_2, \quad u_0 \in L^2(\mathbf{R}^n); \tag{2}$$

局所平滑化作用: $T > 0$, $\Psi \in C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$ の時, ある定数 $C > 0$ が存在して,

$$\left(\int_0^T \|\Psi(x)\langle D\rangle^{\frac{1}{2}}e^{-itH_0}u_0\|_2^2 dt\right)^{\frac{1}{2}} \leq C\|u_0\|_2, \quad u_0 \in L^2(\mathbf{R}^n). \tag{3}$$

ただし, $\|u\|_p$ は $L^p(\mathbf{R}^n)$ のノルム, $D = (D_1, \ldots, D_n)$, $D_j = -i\partial/\partial x_j$ で, $\langle A\rangle = (1 + |A|^2)^{\frac{1}{2}}$ である. 不等式 (2), (3) は, 任意の初期値 $u_0 \in L^2(\mathbf{R}^n)$ に対して, (1) の解 $u(t)$ がほとんどすべての t において u_0 より滑らかであることを意味し, 非線形シュレーディンガー方程式等の研究において重要な役割を果たしている.

本論文は二次関数より早く増大する V に対して (2), (3) を一般化すると同時に, その非線形シュレーディンガー方程式の初期値問題への応用を論じたものである. 主定理は次の二つである. V は C^∞ で, ある定数 $m > 2$, $C_1, C_2 > 0$ に対して次ををみたすものとする.

$$C_1\langle x\rangle^m \leq V(x) \leq C_2\langle x\rangle^m, \quad |D^\alpha V(x)| \leq C\langle x\rangle^{m-\|\alpha|}$$

定理 1 p, θ は不等式 (2) に対すると同じ条件を満たすとする．$T > 0$, $\gamma > \dfrac{1}{\theta}\left(\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{m}\right)$ の時，ある定数 $C > 0$ が存在して，

$$\left(\int_{-T}^{T} \|e^{-itH}u_0\|_p^{\theta} dt\right)^{\frac{1}{\theta}} \le C\|\langle H\rangle^{\gamma}u_0\|_2, \quad u_0 \in L^2(\mathbf{R}^n). \tag{4}$$

$n = 1$ の時は，$\theta = 2$ として左辺の積分順序を入れ替え，右辺で $\gamma = 0$ とした不等式 $\|H^{r(p)}e^{-itH}u_0\|_{L^p(\mathbf{R}_x, L^2([-T,T]_t))} \le C\|u_0\|_2$ が適当な $p > 2$ と $r(p) > 0$ に対して成立する．

定理 2 $T > 0$, $\Psi \in C_0^{\infty}(\mathbf{R}^n)$ の時，ある定数 $C > 0$ が存在して，

$$\left(\int_{-T}^{T} \|\Psi(x)\langle H\rangle^{\frac{1}{2m}}e^{-itH}u_0\|_2^2 dt\right)^{\frac{1}{2}} \le C\|u_0\|_2, \quad u_0 \in L^2(\mathbf{R}^n). \tag{5}$$

(5) の左辺の $1/2m$ をより大きな数で置き換えることは一般にはできない．

さらにこの結果を応用して非線形シュレーディンガー方程式

$$\begin{cases} i\partial_t u = -\Delta u + V(x)u + F(u), & (t, x) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}^n, \\ u(x, 0) = \phi(x), & x \in \mathbf{R}^n, \end{cases} \tag{6}$$

に対して次を証明した．$s > 0$ に対して，$\mathcal{H}^s = D(H^{s/2})$ とし $\mathcal{H}^s$ はグラフノルム $(\|H^{s/2}u\|^2 + \|u\|^2)^{1/2}$ をもつヒルベルト空間である．s より小さくない最小の整数を s_* と書く．

定理 3 $s > \dfrac{n}{2} - \dfrac{2}{r}(\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{m}) > 0$, $0 \le r < s < \infty$ とする．F は $|\gamma| \le s_*$ に対して $|\partial^{\gamma}F(u)| \le C_{\gamma}|u|^{r-|\gamma|}$ をみたすと仮定する．この時，(6) は $\mathcal{H}^s$ において時間局所的に適切である．すなわち，任意の $u_0 \in \mathcal{H}^s$ に対して，$T > 0$ が存在し，(6) は X_T^s に属する一意的な解をもつ．ただし，X_T^s は $C([0, T), \mathcal{H}^s)$ に含まれる適当な関数空間である．

定理 3 を示すの従前のものを改良した合成関数の分数べき微分に関する次の定理を用いる．$\mathcal{L}'(\mathbf{R}^n) \equiv \mathcal{S}'(\mathbf{R}^n)/\mathcal{P}$, $\mathcal{P}$ は $\mathbf{R}^n$ 上の多項式環，である．

定理 4 $F \in C(\mathbf{C}^m; \mathbf{C})$ で $|F(\xi) - F(\eta)| \le \sum_{l=1}^{m}(G_l(\xi) + G_l(\eta))|\xi_l - \eta_l|$ とする．$0 < \alpha < 1$, $\dfrac{1}{r} = \dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q}$, $1 < p \le \infty$, $1 < q, r < \infty$ とする．この時，$u, F(u) \in \mathcal{L}'(\mathbf{R}^n)$, $|D|^{\alpha}u \in L^q(\mathbf{R}^n)$, $G_l(u(x)) \in L^p(\mathbf{R}^n)$ なら $|D|^{\alpha}F(u(x)) \in L^r(\mathbf{R}^n)$ で

$$\||D|^{\alpha}F(u)\|_r \le C\sum_{l=1}^{m}\|G_l(u)\|_p\||D|^{\alpha}u_l\|_q.$$

方程式 (1) の基本解, すなわち e^{-itH} の超関数核 $E(t,x,y)$ は, V が無限遠方で $V(x)=o(|x|^2)$ のときはすべての $t\neq 0$ において（$V(x)=O(\langle x\rangle^2)$ の時には小さな $|t|$ において）滑らかで空間的に有界である. さらに, 対応する古典力学の作用積分 $S(t,x,y)$ を用いて

$$E(t,x,y)=\frac{e^{-in\pi/4}}{(2n\pi|t|)^{n/2}}e^{iS(t,x,y)}a(t,x,y) \tag{7}$$

の形に書けることが知られている. ただし, $a(t,x,y)$ は滑らかで有界な関数である. $V(x)=O(\langle x\rangle^2)$ の時, 不等式 (2), (3) はこの事実を用いて証明されてきた. 一方, $E(t,x,y)$ の正則性, 有界性は V の増大度に関して $V(x)\sim x^2$ を境に急変し, この論文で考えられている $V(x)\geq C\langle x\rangle^{2+\varepsilon}$ の場合, $E(t,x,y)$ はいかなる点の近傍においても C^1 級にならず, また空間的に有界でないこともあることが知られている. 本論文では定理 1, 定理 2 を次のような方法を用いて証明している:

(1) $n=1$ の場合は Langer の turning point 理論を用いて, シュレーディンガー作用素の正規化された固有関数の L^p-ノルムのエネルギー $\to\infty$ での最良の漸近評価を求め, 不等式を時間方向のフーリエ変換によって固有関数の漸近評価に帰着する.

多次元では固有値・固有関数の精密な情報を得ることが困難なため, 基本的には超局所解析的手法を用いる. すなわち,

(2) エネルギー $\sim 2^j$ に局所化し, 局所化された e^{-itH} に対し (4), (5) 型の不等式を古典粒子の一周期程度の時間 $|t|<h_j=2^{(1/m-1/2)/2}$ に対して示せばよいことを Hardy-Littlewood 型不等式を用いて示す.

(3) 局所化された e^{-itH} は $|t|<h_j$ において (7) の形の核をもつ振動積分作用素によって, j に関して一様に, よく近似されることを示す. これから, 定理 1 が従う.

(4) 局所化した $e^{itH}\Psi(x)e^{-itH}$ に対するエゴロフ型の近似定理が $|t|<h_j$ において, j に関して一様に得られることを h-擬微分作用素の理論を用いて示す. 定理 2 はこれから従う。

論文に示された以上の結果はこの方面の研究における新たな知見をあたえるものであり, その証明は上のように新しいアイデアを含み, 多くの工夫を必要とする評価をもってなされている. この論文は高く評価されるべきものである. よって, 論文提出者　張　果平　は、博士（数理科学）の学位を受けるにふさわしい充分な資格があると認める。