論文の内容の要旨

On the homology of the configuration spaces

(配置空間のホモロジーについて)

森山 哲裕

この論文では n 点配置空間の n 次元ホモロジー群について調べた. 正確には, 次のようなある代数について調べた. まず, R を単位元を持つ可換環, $\mathfrak{S}_n$ を n 次対称群, (X, x_0) を基点付き空間とする. そして, Δ_n を X^n の big-diagonal subet, A_n をある成分が x_0 に一致しているような X^n の点全体から成る部分空間とする. そして $(X, x_0)^{\overline{n}} = (X^n, D_n \cup A_n)$ ($n = 0$ の場合には一点から成る集合と定義する) とおく. $(X, x_0)^{\overline{n}}$ には自然に n 次対称群が作用している. これらの無限個の直和の空間 $(X, x_0)^{\overline{0}} \cup (X, x_0)^{\overline{1}} \cup (X, x_0)^{\overline{2}} \cup (X, x_0)^{\overline{3}} \cup \cdots$ は, 自然な写像 $X^m \times X^n \to X^{m+n}$ により半群の構造を持つ. そして,

$$\mathcal{H}(X, x_0; R) = \bigoplus_{n \geq 0} H_n((X, x_0)^{\overline{n}}; R)$$

と定義すると, これは R 上の次数付き代数で, 各次数 n の部分加群は $R\mathfrak{S}_n$-加群である. X が滑らかな多様体の場合には, $H_n((X, x_0)^{\overline{n}}; R)$ は X の n 点の配置空間 $X^n - D_n$ のある compact supported なコホモロジー群のに同型である. この論文では, 代数 $\mathcal{H}(X, x_0; R)$ について調べた.

K. T. Chen [2] は多様体のループ空間のホモロジー群を反復積分を用いて書き表した (この論文ではつねに基点付きのループ空間を考える). 特に, 非単連結な多様体について, ループ空間の連結成分, つまりもとの空間の基本群と differentiable 1-form の反復積分との関係を明かにした. I を基本群の群環 $\mathbb{Z}\pi_1(X, x_0)$ の augmentation ideal, ある i について $x_i = x_{i+1}$ が成り立つ点 $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in X^n$ 全体から成る部分集合を Δ'_n とする. Beilinson ([3]) は Chen の反復積分のアイデアをもとに, 任意の位相多様体について $H_n(X^n, D'_n \cup A_n; \mathbb{Z})$ が I/I^{n+1} に同型になることを示した. 今回考える $H_n((X, x_0)^{\overline{n}}; R)$ は D'_n を D_n でおきかえたものであり, 若干複雑になっている.

Bott-Cattaneo [1] は, 3 次元ホモロジー球面 M に対し, M 上の点配置空間上の積分を用いてある不変量定義した. M に Heegaard 分解が与えられているとき, Heegaard 曲面において他の微分同相写像によってひねって貼り合わせて別の 3 次元多様体を構成したとき, Bott-Cattaneo の不変量がどのように変化するかは興味ある問題である. このとき, 写像類群の曲面上の点の配置空間のホモロジー群への作用を調べることは重要である. これが動機となって, [4] において, X が種数 g の閉曲面から一点を取り除いた曲面 $\Sigma_{g,1}$ である場合に, 写像類群 $\mathcal{M}_{g,1} = \pi_0(\mathrm{Diff}_+(\Sigma_{g,1}, x_0)))$ の $H_n((\Sigma_{g,1}, x_0)^{\overline{n}}; \mathbb{Z})$ への作用を $n \leq 3$ の場合に Johnson 準同型 t を用い具体的に調べ, 作用の kernel を決定した. また, [5] において kernel を 任意の $n \geq 0$ について決定した.

$\mathcal{H}(X, x_0; R)$ が満たすべき次のような一般的な性質を持つ代数を, この論文では $\mathfrak{S}$-代数 ($\mathfrak{S}$-algebra) と呼ぶことにする.

Definition 1. R を可換環, $M = \bigoplus_{n=0}^{\infty} M_n$ を R 上の次数付き代数とする. 各次数 n について, M_n が $R\mathfrak{S}_n$-加群であり, 任意の $\sigma_i \in \mathfrak{S}_{n_i}$, $u_i \in M_n, i = 1, 2$ について,

$$(\sigma_{1*}u_1)(\sigma_{2*}u_2) = (\sigma_1 \times \sigma_2)_*(u_1u_2), \qquad u_2u_1 = \epsilon(n_1, n_2)_*(u_1u_2)$$

が成り立つとき, M を R 上の $\mathfrak{S}$-代数という. ここで, $\sigma_1 \times \sigma_2 \in \mathfrak{S}_{n_1+n_2}$ は σ_1, σ_2 の直積, $\epsilon(n_1, n_2) \in \mathfrak{S}_{n_1+n_2}$ は $1 \le i \le n_1$ の場合には $\epsilon(n_1, n_2)(i) = n_1 + i$, $n_1 < i \le n_2$ の場合には $i - n_2$ と定義されるものとする. また, M から導かれる完備化された $\mathfrak{S}$-代数 $\widehat{M}$ とは, M の次数 n に関する完備化のこととする.

そしてこの論文では, 任意の離散群 G に対しても, ある方法 (後述) で R 上の $\mathfrak{S}$-代数 $\mathcal{H}^{\mathrm{grp}}(G; R)$ を定義した. 単位元を持つ $\mathfrak{S}$-代数の圏を $\mathcal{C}_R^1$ とする. $\mathcal{H}$ や $\mathcal{H}^{\mathrm{grp}}$ は位相空間または群の圏から $\mathcal{C}_R^1$ への共変関手である. そして, 次を証明した.

Theorem 2. R を単位元を持つ可換環, (X, x_0) を基点付き有限 CW-複体とする. このとき, 次のような R 上の $\mathfrak{S}$-代数としての自然な同型が存在する.

$$\mathcal{H}(X, x_0; R) \cong \mathcal{H}^{grp}(\pi_1(X, x_0); R).$$

Theorem 3. *Theorem 2 の仮定のもとで,* $I_R \subset R\pi_1(X, x_0)$ *を augmentation ideal, そして* $\widehat{R\pi_1(X, x_0)} = \varprojlim_n R\pi_1(X, x_0)/{I_R}^n$ *とおく. このとき, 二つの自然な写像*

$$\begin{aligned} \phi'_n &: I_R/{I_R}^{n+1} \to H_n((X, x_0)^{\overline{n}}; R), \\ \Phi' &: \widehat{R\pi_1(X, x_0)} \to \widehat{\mathcal{H}}(X, x_0; R) \end{aligned}$$

が存在し, それぞれ単射である. ただし, ϕ'_n *は* R*-加群としての,* Φ' *は* R *上代数としてのある準同型である (後で定義する).*

$\mathcal{H}^{\mathrm{grp}}(G; R)$ を定義の概略を述べる. 整数の組 $n \ge k \ge 1$ に対して, n 点集合 $\{1, 2, \ldots, n\}$ の k 個のブロックへの "順序付けられた" 分割全体から成る集合を $\mathcal{P}_{n,k}$ とする. そして, $n > 0$ の場合には $\mathcal{P}_{n,0} = \phi$, $\mathcal{P}_{0,0} = \{1\}$ と定義する. 整数およびブロックの置換により, $\mathcal{P}_{n,k}$ へ $\mathfrak{S}_n \times \mathfrak{S}_k$ が作用する. 一方, R 上 G で生成される tensor 代数 $\bigoplus_{k=0}^{\infty} RG^{\otimes k}$ の各次数 k の部分加群も $R\mathfrak{S}_k$-加群である. そこで, 次数付き代数

$$\bigoplus_{n \ge k \ge 0} R\mathcal{P}_{n,k} \otimes_{\mathfrak{S}_k} RG^{\otimes k} \tag{1}$$

を考えると, これは R 上の $\mathfrak{S}$-代数になる.

この $\mathfrak{S}$-代数 (1) の元のイメージは次のようなものである. まず, $P = ((1)) \in \mathcal{P}_{1,1}$, $\gamma \in G$ の場合, $P \otimes \gamma$ は path γ の上に一点が配置されている様子を表わていると思うことにする. $P' = ((2, 1))$ の場合は, $P \otimes \gamma$ は γ の上にその向きに関して $2, 1$ の順に配置されている様子と思うことにする. すると, より一般に $P'' = (P_1, P_2, P_3, P_4) = ((3, 5, 1), (), (6, 2), (4)) \in \mathcal{P}_{6,4}$, $u = \gamma_1 \otimes \cdots \otimes \gamma_4 \in RG^{\otimes 4}$, の場合には, $P'' \otimes u$ は path γ_i の上に順序を込めて点 P_i が配置されている様子を表わしていると思える. $i = 2$ の部分は γ_2 の上に何も点が無い状態を表わしている. つまり, $R\mathcal{P}_{n,k} \otimes_{\mathfrak{S}_k} RG^{\otimes k}$ は, n 個の点が k 本の path の上に並べて配置されている状態全体から張られる R 上のベクトル空間と思える. 点の数 n がホモロジー類としての次元に対応している. このようにして, $\mathfrak{S}$-代数としての自然な写像

$$\widetilde{\Psi} : \bigoplus_{n \ge k \ge 0} R\mathcal{P}_{n,k} \otimes_{\mathfrak{S}_k} RG^{\otimes k} \to \mathcal{H}(X, x_0; R)$$

を定義できる. 実はこの $\mathfrak{S}$-代数準同型 $\widetilde{\Psi}$ は kernel を持つ. すぐ分かるのが反復積分でよく知られた関係式であり, (i) path の積に由来するものと, (ii) shuffle 積に由来するものである. 関係 (i) (ii) で生成される "$\mathfrak{S}$-イデアル" を $J_{G,R}$ とする. $J_{G,R}$ による $\mathfrak{S}$-代数 (1) の商 $\mathfrak{S}$-代数を $\mathcal{H}^{\mathrm{grp}}(G;R)$ と定義する:

$$\mathcal{H}^{\mathrm{grp}}(G;R) = \left(\bigoplus_{n \geq k \geq 0} R\mathcal{P}_{n,k} \otimes_{\mathfrak{S}_k} RG^{\otimes k} \right) \Big/ J_{G,R}.$$

$\mathcal{H}^{\mathrm{grp}}(G;R)$ は $\mathfrak{S}$-代数であり, Ψ' は Theorem 2 の同型を与える $\mathfrak{S}$-代数準同型 $\Psi : \mathcal{H}^{\mathrm{grp}}(G;R) \to \mathcal{H}(X, x_0; R)$ を導く.

さて, X を滑らかな多様体とする. Δ^n を n 次元単体, $c_\gamma^n : \Delta^n \to X^n$ を $c_\gamma^n(t_1, t_2, \ldots, t_n) = (\gamma(t_1), \gamma(t_2), \ldots, \gamma(t_n))$ で定義される写像とする. このとき γ に沿った Chen の反復積分は, いくつかの微分形式の直積 (X^n 上の微分形式) の c_γ^n による引き戻しの Δ^n 上の積分であった. c_γ^n は $(X, x_0)^{\overline{n}}$ の n 次元サイクルであり, そのホモロジー類のを $\phi_n(\gamma)$ と書くとき, 等式

$$\phi_n(c_\gamma^n) = \Psi\big(((1, 2, \ldots, n)) \otimes \gamma\big) \in \mathcal{H}_n(X, x_0; R)$$

が成り立つ. したがって, 写像

$$\phi_n : R\pi_1(X, x_0) \to H_n((X, x_0)^{\overline{n}}; R)$$
$$\Phi = \sum_{n=0}^{\infty} \phi_n : R\pi_1(X, x_0) \to \widehat{\mathcal{H}}(X, x_0; R)$$

を定義できる. ここで, $\widehat{\mathcal{H}}(X, x_0; R)$ は完備化された $\mathfrak{S}$-代数である. Φ は R 上の代数としての準同型になる. 反復積分が持つ性質はそのまま ϕ_n に反映され, その結果, ${I_R}^{n+1} \subset \operatorname{Ker} \phi_n$ であることが容易に確かめられ, Theorem 3 のような準同型 ϕ_n', Φ' が導かれる.

いくつかの例

詳細はここでは省くが, 一般に 圏 $\mathcal{C}_R^1$ において, $\mathfrak{S}$-algebra の準同型 $h_i : L \to M_i, i = 1, 2$ があるとき, これらのコファイバー積 $M_1 \bullet_L M_2$ が常に存在する. このことや定理などを用いて, いくつか計算例を挙げることができる.

Example 4. $\mathcal{H}(S^1, x_0; R) = \bigoplus_{n \geq 0} R\mathfrak{S}_n$. これを S_R とかくことにする. 積は shuffle 積により与えられる. 例えば, $1_n \in \mathfrak{S}_n$ を単位元とするとき, 1_m と 1_n の shuffle 積は, $\sigma^{-1}(1) < \ldots < \sigma^{-1}(m), \sigma^{-1}(m+1) < \ldots < \sigma^{-1}(m+n)$ を満たすような $\sigma \in \mathfrak{S}_{m+n}$ 全体の符合付きの和 $\sum_\sigma \operatorname{sgn}(\sigma)\sigma$ である.

Example 5. $X = \Sigma_{g,r}$ を種数 g の向き付けられた閉曲面から r 点を除いた空間とする ($g \geq 0, r \geq 1$). すると, $\mathcal{H}(\Sigma_{g,r}, x_0; R) \cong {S_R}^{\bullet(2g+r)}$. これは $\Sigma_{g,r}$ が wedge 和 $\bigvee_{2g+r} S^1$ にホモトピックだからである. そして $R\mathfrak{S}_n$-加群として次のような同型が成り立つ.

$$\mathcal{H}_n(\Sigma_{g,r}, x_0; R) \cong \frac{(2g+r)(2g+r+1)\cdots(2g+r+n-1)}{n!} R\mathfrak{S}_n.$$

さらに, $\Sigma_{g,1}$ の場合, 写像類群 $\mathcal{M}_{g,1} = \pi_0(\mathrm{Diff}_+(\Sigma_{g,1}, \partial\Sigma_{g,1}))$ の $\mathcal{H}_n(\Sigma_{g,1}, x_0; \mathbb{Z})$ への作用の kernel は $\pi_1(\Sigma_{g,1}, x_0)$ の n 次降中心商群への作用の kernel に等しい ([4]).

Example 6. $X=\Sigma_g$ を向き付けられた閉曲面とする. このとき, $\mathcal{H}(\Sigma_g,x_0;R)\cong S_R^{\bullet 2g}/I\cong\mathcal{H}^{\mathrm{grp}}(G;R)$. ここで, $G=\pi_1(\Sigma_g,x_0)=\langle\alpha_1,\ldots,\alpha_g,\beta_1,\ldots,\beta_g\mid\zeta=[\alpha_1,\beta_1]\cdots[\gamma_g,\beta_g]=1\rangle$ であり, I は ζ によって生成される $\mathcal{H}(\Sigma_g,x_0;R)$ の $\mathfrak{S}$-部分代数の次数 ≥ 1 なる部分により生成される $\mathfrak{S}$-ideal. (Σ_g,x_0) の写像類群 $\mathcal{M}_{g,*}$ の $\mathcal{H}_n(\Sigma,x_0;\mathbb{Z})$ への作用の kernel は, G の n 次降中心商群への作用の kernel に等しい.

Example 7. $M=M_+\cup_{\Sigma_g}M_-$ を向き付けられた 3 次元閉多様体と, その Heegaard 分解とするとき,

$$\begin{aligned}\mathcal{H}(M,x_0;R)&\cong\mathcal{H}(M_+,x_0;R)\underset{\mathcal{H}(\Sigma_g,x_0;R)}{\bullet}\mathcal{H}(M_-,x_0;R)\\&\cong(S_R^{\bullet g})\underset{S_R^{\bullet 2g}/I}{\bullet}(S_R^{\bullet g})\cong\mathcal{H}^{\mathrm{grp}}(\pi_1(M,x_0);R).\end{aligned}$$

ただし, コファイバー積は Σ の埋め込み方に依存する.

Example 8. X を代数多様体とすると, $\mathcal{H}_n(X,x_0;\mathbb{C})=H_n((X,x_0)^{\overline{n}};\mathbb{C})$ は 混合 Hodge 構造, 特に重みフィルター W を持つ (ホモロジーで考えているため一般に負の重みを持つ). W は $\mathcal{H}(X,x_0;\mathbb{C})$ に フィルター付き $\mathfrak{S}$-代数の構造を与える. X を種数 g の閉リーマン面から一点を取り除いたものとすると, $\mathcal{H}_n(X,x_0;\mathbb{C})$ は -1 から $-n$ の重みを持つ重みフィルターを持ち, $Sp(2g;\mathbb{C})$-加群としての同型

$$p\,\mathrm{gr}_k^W(\mathcal{H}_n(X,x_0;\mathbb{C}))\cong\begin{bmatrix}n\\k\end{bmatrix}H_1(X,x_0;\mathbb{C})^{\otimes k}$$

が成り立つ. $\begin{bmatrix}n\\k\end{bmatrix}$ は第一種 Stirling 数の絶対値.

謝辞

この博士論文作成にあたり, 数々の励ましと助言をして下さいました指導教官の古田幹雄先生に深く感謝致します. また, 配置空間に関して多くの助言をして下さいました河野俊丈先生, 写像類群全般に関して助言をして下さいました森田茂之先生, 河澄響矢先生, 混合 Hodge 構造等についての知識, 情報等を提供して下さいました寺杣友秀先生, 松本眞先生, 北野晃明先生にも感謝申し上げます.

参考文献

[1] R Bott, A. S. Cattaneo, *Integral invariants of 3-manifolds*, J.Differential Geom. 48 (1998), no-1 1–13

[2] Chen K.-T., *Iterated path integrals*, Bull. Amer. Math. Soc. 83 (1977) 323–338

[3] Goncharov A. B, *Multiple polylogarithms and mixed Tate motives*, math.AG/0103059 2001

[4] T Moriyama, *Johnson* 準同型と曲面上の点の配置空間, Art of Low Dimensional Topology VII, (2001) 111–121

[5] T Moriyama, *The mapping class group action on the homology of the configuration spaces of surfaces*, preprint, 2001.