論文審査の結果の要旨

氏名　森山哲裕

提出論文「On the homology of the configuration spaces」において論文提出者は，配置空間のホモロジー群のある部分と基本群の関係における対称群作用の役割を，明示的に表現した．

応用として，曲面の写像類群に入る自然な filtration としてよく知られているものを，ある種の配置空間のホモロジーを用いて記述した．「ある種の」というのは，big diagonal と呼ばれる部分集合に関する relative homology 群である．「記述」とは，ある次数までの配置空間のホモロジーへ作用が自明であるか否かによって filtration が再現されるということである．

背景あるいは動機としては，配置空間を利用して定義される一連の3次元多様体の不変量である Bott-Cattaneo 不変量の性質を調べることがあった．2000年に D. Thurston によってこれらの不変量が有限型不変量であることが証明された．結果として，一連の有限型不変量が配置空間上の一種の Massey 積として表示された．

Massey 積のような2次特性類の系統的な構成において，配置空間に対する対称群作用が基本的な役割を果たすことは，ordinary cohomology, K-cohomology に対して Atiyah によって指摘されていた．

論文提出者の構想は，有限型不変量の振る舞いを対称群の作用によって統制する理論にあった．

提出論文は，その第一歩である．従来 Beilinson によって Chen の反復積分のアイディアに基づき，配置空間のホモロジーと基本群との関係がしられていた．(証明の細部は Goncharov の 2001 年のプレプリントに述べられている.) 基本的な構成は，ループをその上にのっている有限個の点よる近似を用いる．ループ上に乗った点列には自然な順序がついている．これらの構成と比較するなら，論文提出者の定式化は，この順序を取りかえることによる効果を記述することに相当する．

結果的に，論文提出者の仕事は，Beilinson の仕事に極めてよりそうものとして定式化された．これは，有限型不変量の考察に新しい道具を導入する可能性を開いたものとも評価される．

以下，提出論文の結果を具体的に述べる．論文提出者は $\mathcal{S}$ 代数の概念を次のように定義する：M を可換環 R 嬢の次数付代数とする．各次数 n について，M_n が $R\mathcal{S}_\backslash$ 加群であり，任意の $\sigma_i \in \mathcal{S}_{n_i}, u_i \in M_n, i = 1, 2$ について $(\sigma_{1*}u_1)(\sigma_{2*}u_2) = (\sigma_1 \times \sigma_2)(u_1 u_2)$, $u_2 u_1 \epsilon(n_1, n_2)_*(u_1 u_2)$ が成り立つ．ここで $\sigma_1 \times \sigma_2 \in \mathcal{S}_{\backslash\infty+\backslash\in}$ は σ_1, σ_2 の直積，$\epsilon(n_1, n_2) \in \mathcal{S}_{n_1+n_2}$ は $1 \leq i \leq n_1$ の場合には $\epsilon(n_1, n_2)(i) = n_2 + i$ であり $n_1 < i < n_2$ の場合には $i - n_1$ と定義される置換とする．また M から導かれる完備化された $\mathcal{S}$ 代数 $\hat{M}$ とは M の，次数 n に関する完備化のことを指す．

論文提出者は，任意の基点付 CW 複体 (X, x_0) に対して，X の配置空間のある種のホモロジーを利用して，$\mathcal{S}$ 代数 $\mathcal{H}(X, x_0; R)$ を構成した．また，任意の離散群 Γ に対しても $\mathcal{S}$ 代数 $\mathcal{H}^{grp}(\Gamma; R)$ を構成した．基本定理は次の通りである．

定理 1 次の $\mathcal{S}$ 代数としての自然な同型がある．

$$\mathcal{H}(X, x_0; R) \cong \mathcal{H}^{grp}(\pi_1(X, x_0); R)$$

この基本定理のもとで，次のことが示される．

1. 基本定理の両辺において，適当な filtration が自然に対応している．
2. 有向閉曲面に対する $\mathcal{S}$ 代数の filtration は，写像類群の filtration を誘導する．これは基本群の降中心商群に伴う filtration と一致する．
3. 単位元をもつ $\mathcal{S}$ 代数のカテゴリーにおいて常にコファイバー積が存在する．3 次元多様体の Heegaard 分解にともない，対応する $\mathcal{S}$ 代数をコファイバー積によって記述できる．

以上の成果により，論文提出者 森山哲裕は，博士（数理科学）の学位を受けるにふさわしい充分な資格があると認める．