論文の内容の要旨

論文題目:　Microlocal Analysis and Inverse Problems
(超局所解析と逆問題)

氏名　:　滝 口 孝 志

近年、様々な分野への応用という観点から逆問題の研究が盛んに行われているが、本論文では、特に超局所解析的手法を用いた逆問題について研究した。本論文は三部から構成されている。

第一部では Radon 変換の外部問題の一意可解性について研究した。Helgason の台定理により、この問題の一意可解性が成立するためには、函数が大域的に急減少していることが必要十分であることが知られているが、我々はこの急減少の条件を開錐に制限し、Helgason の定理の一般化を行った。最初にこの一般化を試みたのは J.Boman で、彼は以下のような主張をした。

主張. $f \in C(\mathbb{R}^n \setminus K)$、$K$ を $\mathbb{R}^n$ のコンパクト凸集合、Γ を $\mathbb{R}^n$ の開錐、$K_\Gamma := \bigcap_{x \in K}(x + (\Gamma \cup (-\Gamma)))$ とせよ。このとき、

(I.1) $$Rf(\xi) = 0 \quad \text{for } \forall \xi \cap K = \emptyset,$$

(I.2) $$|x|^k f(x) \to 0 \quad \text{as } |x| \to \infty \text{ in } \Gamma, \text{ for } \forall k \in \mathbb{N},$$

(I.3) f decays enough at infinity to be integrable on hyperplanes

であるならば、K_Γ で $f(x) = 0$ である。

ところが、条件 (I.3) は十分でなく、この主張は正しくない。第一部の目的は二つあり、最初の目的は上の主張が正しくないことを反例を構成することにより示すことである。

定理 **I.1.** (I.1), (I.2), (I.3) をみたす $f \neq 0$ なる解析関数が存在する。

この反例は $\varphi(z) := iz^2 - i$ とし、

$$h(z) := \frac{1}{\varphi(z)^{\log \varphi(z)}} = e^{-(\log \varphi(z))^2} \in C(M) \cap \mathcal{A}(M^{\mathrm{int}})$$

を整函数により

$$M := \mathbb{C} \setminus (\{z \in \mathbb{C}\ ;\ |z| < 5\} \cup \{1/4 < (\mathrm{Re}z)^2 - (\mathrm{Im}z)^2 < 4,\ \mathrm{Re}z < 0,\ \mathrm{Im}z > 0\})$$

なる領域で近似することにより得られる。

第一部のもう一つの目的は、条件 (I.3) を正しい条件で置き換え、Helgason の台定理の一般化を証明することである。

定理 **I.2.** $f \in C(\mathbb{R}^n \setminus K)$、$K$ を $\mathbb{R}^n$ のコンパクト凸集合、Γ を $\mathbb{R}^n$ の開錐とする。f が (I.2),

$$Rf(\xi) = 0 \quad \text{for } \forall\xi \quad (\xi \cap K_\Gamma \neq \emptyset,\ \xi \cap K = \emptyset), \tag{I.4}$$

$$f(x) = o(|x|^{-n}) \text{ uniformly in } x \text{ as } |x| \to \infty \tag{I.5}$$

をみたすならば、$K_{\widehat{\Gamma}}$ で $f(x) = 0$ である。ここで $\widehat{\Gamma}$ は Γ の凸包である。

(I.5) が (I.3) に代わる正しい十分条件であり、この条件は定理 I.2 の証明中重要な役割を果たす。この定理の証明では、$\mathbb{R}^n$ を S^n に埋め込み、$\mathbb{R}^n$ 上の函数 f を S^n 上の函数 F に変換するが、(I.5) により f 無限遠で滑らかであることがいえ、その結果、F が $\{s_{n+1} = 0\}$ で滑らかであることがいえる。この事実と、解析パラメータをもつ分布の一意性、Holmgren の一意性定理により定理 I.2 がいえる。

Radon 変換の大域的一意性については、$f \in L^1$ が十分であり、$Rf(\xi)$ が任意の ξ について絶対収束するだけでは十分でないことが知られており、我々の反例もこのことを示している。外部問題の一意可解性について、同じような状況が生じていることは興味深い。(I.5) は条件 $f \in L^1$ の局所化ともいえ、定理 I.2 では、錐 Γ では Helgason の台定理同様に急減少条件を錐の外では大域的一意性の十分条件と同じ減少の条件を課しているといえる。

第二部では量子力学系における二体散乱問題の逆問題について研究した。configuration space において適当な初期状態 $\phi_0(x) > 0$ を固定し、粒子を速度 v で加速する。$|v| \to \infty$ とした高速状態における散乱 $\lim_{|v|\to\infty} S\phi_v$ の観測からポテンシャルを復元するという問題を考える。この問題の一意可解性は V.Enss と R.Weder によって得られているが、我々は次の復元公式を示した。

定理 II.1. V を短距離型ポテンシャルとし、ある $K>0$ に対し

$$(1+R)^\rho \|V(x)\chi(|x|\geq R)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \in L^1((K,\infty),dR), \tag{II.1}$$

が成立すると仮定する。ここで $\chi(|x|\geq R)$ は $\{|x|\geq R\}$ の特性関数である。このとき、$\alpha\geq 1-n$ に対し緩増加分布の意味で以下が成立する。

$$V=\frac{1}{2\pi|S^{n-2}|}I^{-\alpha}P^{\#}I^{\alpha-1}\Big(\frac{1}{\phi_0}\lim_{|v|\to\infty} i|v|e^{-imv\cdot x}(S-I)\phi_v\Big),$$

ここで $P^{\#}$ は adjoint X-ray transform であり、I^α は order α の Riesz potential である。

この復元公式に必要なデータは、Radon 変換の復元に必要なデータと同じ量であり、散乱作用素 S そのものを知る必要はない。この結果はポテンシャルの復元において、既存の結果よりも復元に必要なデータを減らしているといえる。

ポテンシャルの台がコンパクトであるとき、定理 II.1 は緩増加分布の意味のみでなく、L^2 の意味でも成立する。これらの証明のアイデアは高速状態 $\lim_{|v|\to\infty} S\phi_v$ をポテンシャルの X 線変換により

$$\lim_{|v|\to\infty} i|v|e^{-imv\cdot x}(S-I)\phi_v=\int_{-\infty}^{+\infty}V(x+\tau\hat{\mathrm{v}})\phi_0 d\tau \tag{II.2}$$

と表すことである。ここで $\hat{\mathrm{v}}:=v/|v|$ である。この表現は Enss-Weder によってポテンシャルの一意可解性を示すために示されたが、彼らは (II.2) を緩増加分布よりももっと弱い意味で示しており、我々は (II.1) の仮定の下で (II.2) を緩増加超分布の意味で示した。(II.1) は Enss-Weder の仮定より少し強いが、両者の差はとても小さい。Enss-Weder の仮定をみたすほとんどのポテンシャルが (II.1) をみたす。さらに我々はポテンシャルの台がコンパクトであるとき、(II.2) が L^2 で成立することも示した。これら (II.2) の意味の拡張が、定理 II.1 とその L^2 への拡張を示す上で本質的な役割を果たした。定理 II.1 の L^2 への拡張については、L^2 における X 線変換の反転公式を示し、それを応用した。

第二部ではポテンシャルの近似についても議論した。ここではポテンシャルの台はコンパクトであると仮定した。適当な初期状態 $\phi_0(x)>0$ for $|x|\leq 2$ を固定し、観測によって得られる小さい誤差を含んだ散乱のデータから L^2 において元のポテンシャルに十分近い近似ポテンシャルを構成した。その方法は X 線変換の Moore-Penrose inverse を用いて新しい X 線変換の正則化法を与え、この正則化を近似ポテンシャルの構成に応用するというものである。

定理 **II.2.** $\rho < 1$ かつ $\mathrm{supp}V \subset \{|x| \le \rho\}$、また十分大な v に対し

$$F(V, \phi_0, x, v) = i|v|e^{imv\cdot x}(S - I)\phi_v(x) + e(x, v)$$

とする。ここで $e(x,v)$ は小さな誤差である。このとき $P^\dagger G$ は正則解であり

$$\|P^\dagger G - V\|_{L^2(\Omega^n)} \le \frac{2\sqrt[4]{2}|S^{n-1}|^{\frac{1}{2}}}{\min_{|x|\le 2}\phi_0(x)(1-\rho)^{1/4}\sqrt{|S^{n-2}|}}\varepsilon$$

をみたす。ここで $P^\dagger G$ はポテンシャルの X 線変換 $PV = G$ の Moore-Penrose inverse であり、$\Omega^n := \{|x| \le 1\}$、$\varepsilon$ は e と次元 n のみに依存する小さな定数である。

第三部では、波動方程式のある過剰決定初期値問題の一意可解性について研究した。Δ を $\mathbb{R}^n$, $(n \ge 2)$ 上の Laplacian とし、

$$\text{(III.1)} \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u = 0, \\ \partial_x^\alpha u|_{x=x_0} = u_\alpha(t) \quad \text{for any } \alpha, \end{cases}$$

なる初期値問題を考える。この問題は一点の観測から全体の波動を復元するという逆問題である。この問題は非準解析超分布の枠組では一意可解であること、佐藤超関数の枠組みでは一意非可解であることが知られている。第三部では、(III.1) が準解析超分布の枠組みで一意非可解であることを示した。

定理 **III.1.**

$$\text{(III.2)} \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u = 0, \\ \partial_x^\alpha u|_{x=x_0} = 0 \quad \textit{for any } \alpha \end{cases}$$

をみたし、$x = x_0$ の近傍で $u(t,x) \not\equiv 0$ なる準解析超分布 $u(t,x)$ が存在する。

この反例を構成するために、初期値が正則パラメータを含む部分双曲型偏微分方程式の初期値問題の可解性を超分布について示した。

定理 **III.2.** $P(D)$ は定数係数 m 階線型編微分作用素で、数列 M_k は非準解析または準解析クラスを定義するものとする。$\{x_1 = 0\}$ が P に対して非特性であるとき、次の条件は同値である。

i) u_j が (M_k) (*resp.* $\{M_k\}$) クラスの超分布で台が x'' についてコンパクト、z''' を正則パラメータとして含むとき、初期値問題

$$\begin{cases} P(D)u(x) = 0, \\ \partial_{x_1}^j u|_{x_1=0} = u_j(x'', z'''), \quad j = 0, 1, \cdots, m-1, \end{cases}$$

は x'' について台がコンパクトかつ z''' を正則パラメータとして含むような同じクラスの局所超分布解 $u(x_1, x'', z''')$ を持つ。

ii) 定数 β, γ, C, l が存在し (*resp.* 定数 β, γ が存在し、任意の l に対し C が存在し) $P(\zeta) = 0$ なる ζ に対し

$$|\mathrm{Im}\zeta_1| \leq \beta|\mathrm{Im}\zeta''| + \gamma|\zeta'''| + M(l|\zeta''|) + C,$$

が成立する。ここで

$$M(t) := \sup_k \log \frac{t^k}{M_k}$$

である。

この定理を用いて定理 III.1 が示される。次の初期値問題を考える。

$$\text{(III.3)} \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u = 0, \\ \partial_{x_1}^j u|_{x_1=0} = u_j(t, x'), \quad j = 0, 1, \end{cases}$$

ここで u_j たちは t についてコンパクト台で、x' を正則パラメータとして含むとする。

φ を t についてコンパクト台、x'' を正則パラメータとして含み、任意の α に対し $\partial_{x'}^{\alpha}\varphi|_{x'=0} = 0$、かつ $0 \in \mathrm{supp}\varphi$ をみたす準解析超分布とする。このような準解析超分布の存在は J.Boman により示されている。(III.3) における初期値を

$$u_0 = \varphi(t, x'), \quad u_1 = 0.$$

とすると定理 III.2 より (III.3) は局所準解析超分布解を持つが、この局所解が定理 III.1 の反例になることがいえる。