論文審査の結果の要旨

氏名　　滝口　孝志

本論文提出者は、超局所解析と逆問題に関し, 大きく3部から構成される内容の研究をおこなった。

第1部は医療工学において重要な課題であるCTスキャナーの理論の数学的基礎付けとして脚光を浴びることになった, 関数のラドン変換に関するものである。$f(x)$ を $\mathbb{R}^n$ 上の関数, ξ を $\mathbb{R}^n$ 内の超平面とするとき積分

$$Rf(\xi) = \int_\xi f(x) d\mu_\xi(x)$$

を ξ の関数とみたものを $f(x)$ のラドン変換という。ここで $d\mu_\xi$ は超平面 ξ 上の自然な測度である。フーリエ変換の場合と同じくすべての $Rf(\xi)$ の値を使って $f(x)$ を復元する公式が得られるが, 応用上はなるべく少ないデータから如何に $f(x)$ の部分データが得られるかが問題となる。Helgason はこの逆対応の一意性を次のように数学的に定式化し証明した:

"$f(x)$ は無限遠において急減少する関数でコンパクト凸集合 $K \subset \mathbb{R}^n$ を与えたとき, K と交わらない任意の超平面 ξ に対して $Rf(\xi) = 0$ となるならば $f(x) = 0$ on $\mathbb{R}^n \setminus K$."

その後 J. Boman がこの定理の方向別の一般化を試み,

"$f(x)$ は開錐 $\Gamma \subset \mathbb{R}^n$ 方向に限ったとき無限遠において急減少し, かつ任意の超平面 ξ 上で可積分な関数であるとする。そのとき, コンパクト凸集合 $K \subset \mathbb{R}^n$ に対して K と交わらない任意の超平面 ξ に対して $Rf(\xi) = 0$ であれば $f(x) = 0$ on K_Γ."

を主張した。ただし $K_\Gamma = \cap_{x \in K}(x + (\Gamma \cup (-\Gamma)))$. Boman の研究の重要性に着目していた論文提出者は彼の議論を追う中で不備があることをみつけ, 当該論文の第1部で問題の完全解決を目指した。その結果上記の条件のうち "任意の超平面 ξ 上で可積分" , という部分は

$$f(x) = o(|x|^{-n}) \text{ as } |x| \to \infty$$

で置き換えられるべきである, ということを反例を構成して示し, これも含めたあらたな条件の下での証明を与えた。このような, 応用上でも関心が高い数学上の基本的な問題においてほぼ必要十分ともいえる条件を与えたことは高く評価できる。また反例の構成に使った, 非有界集合上での正則関数の近似に関する議論, および主定理の証明に使った超局所解析的な手法は独創的であり今後この種の問題解決の手本としても評価できる。

第2部は量子力学における2体散乱問題の逆問題についての研究である。1995 年に V. Enns と R. Weder はポテンシャルに関するある条件下で粒子の速度 v が大きいときの散乱データからポテンシャル $V(x)$ が一意的に定まることを示した。これに対し論文提

出者はやや強い仮定

$$(1+R)^{\rho}\|V(x)\chi(|x|\geq R)\|_{L^{\infty}(\mathbb{R}^n)}\in L^1((K,\infty),\ dR)$$

を課すことによりポテンシャルの，緩増加ディストリビューションの意味での復元公式

$$V=\frac{1}{2\pi|S^{n-2}|}I^{-\alpha}P^{\#}I^{\alpha-1}\Big(\frac{1}{\phi_0}\lim_{|v|\to\infty}i|v|e^{-imv\cdot x}(S-I)\phi_v\Big)$$

を得ることに成功した。この公式は，復元のためには S そのものよりやや情報量が少ない量で十分であることも示している。また V の台がコンパクトなときは上の公式は L^2 の意味でも成立することが示している。これらは公式として重要であるばかりではなく証明に使われているラドン変換研究の際のX線変換などの手法がポテンシャル問題にも有効であることを示したことは高く評価できる。この他，第 2 部では応用上大切な近似理論も扱っている。すなわち観測による小さな誤差を含んだ散乱データから L^2 の意味での近似としてポテンシャルを構成した。ここで X 線変換の Moore-Penrose inverse を用いた点は新しく，結果と共に今後この方面の研究のよい参考になると思われる。

第 3 部は波動方程式に対する次のような過剰決定初期値問題の解の非一意性に関する研究である。

$$\begin{cases}\partial_t^2u-\Delta u=0,\\ \partial_x^{\alpha}u|_{x=x_0}=u_{\alpha}(t)\quad \text{any }\alpha.\end{cases}$$

すなわち空間のある 1 点 x_0 での情報 $\{u_{\alpha}(t);\alpha=(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)\geq 0\}$ だけから時空全体での解が定まるか，という 1 種の逆問題である。これは 1 点での盗聴によって状況全体が把握できるか，というような現実的な問題の数学的モデル化ともいえる。これについては u が通常の関数，すなわち少なくともシュバルツのディストリビューションなどを含む，いわゆる非準解析的超分布の範囲内では解の一意性が知られている。それに対しもっとも広いクラスといえる佐藤超関数の範囲では非一意であることが知られている。論文提出者は第 3 部においてこの中間クラスである，準解析的超分布のクラスでこの問題を考察し解が非一意であることを反例を作ることにより示した。この反例の構成には J. Boman による，正則パラメーターをもつ 0 でない準解析超分布であるが正則パラメーターを止めたときのすべての展開係数が 0 超分布となるような例が使われる。具体的にはそのような超分布を右辺とする，波動方程式に対する，非時間軸に対する初期値問題を解くことによって反例が構成される。結果自体も純粋数学的には興味深いがむしろ準解析超分布，という従来解析学ではほとんど取り上げられることのなかった超関数を扱い，存在定理を含むいくつかの手法を編み出したことが高く評価できる。

よって, 論文提出者　滝口 孝志　は, 博士（数理科学）の学位を受けるにふさわしい充分な資格があると認める。