論文の内容の要旨

論文題目　曲面にはめ込まれた曲線から構成される接円束の正オープンブック分解について

氏名　石川昌治

１９６０年代に J.Milnor は、複素超曲面特異点の補空間にファイバー束を構成し、その研究を行った。いわゆるミルナー束である。

１９７０年代に、N. A'Campo と S.M. Gusein-Zade は複素平面曲線孤立特異点の実モース化の研究を行い、任意の平面曲線特異点には実モース化が存在することを独立に証明した。実モース化の重要な応用として、実モース化で得られる実平面上に generic にはめ込まれた曲線から Dynkin 図形が定義され、ミルナー束のモノドロミー写像をその Dynkin 図形から読み取ることができるということが知られている。

１９９８年に A'Campo は divide とそこから構成されるファイバー束を導入した。Divide とは、単位円盤内に generic, relative にはめ込まれた曲線のことである。実モース化理論に現れる「実平面にはめ込まれた曲線」も単位円盤上で考えれば divide ということになる。A'Campo の試みは、実モース化の曲線とミルナー束との関係の任意のはめ込まれた曲線への一般化である。

Divide のファイバー束を構成するに際し、まずはリンクを定義する必要がある。単位円盤を $D=\{x=(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2 \mid x_1^2+x_2^2\leq 1\}$ とし、P を divide、つまり、単位円盤内にはめ込まれた曲線とする。$\mathbb{R}^2$ の接束 $T(\mathbb{R}^2)$ の縦方向の座標を $u=(u_1,u_2)$ とし、

$$ST(\mathbb{R}^2):=\{(x,u)\in T(\mathbb{R}^2) \mid |x|^2+|u|^2=1\}$$

とおく。$ST(\mathbb{R}^2)$ は接束の単位球面であり、特に S^3 に同相である。このとき、divide のリンク $L(P)$ を

$$L(P) := \{(x, u) \in ST(\mathbb{R}^2) \mid x \in P, u \in T_x(P)\}$$

と定義する。ここで、$T_x(P)$ は x における P の接ベクトルの集合である。

P を 0 レベル集合として持ち、かつ、P に囲まれた領域にはただ 1 つの最大値あるいは最小値しか持たないモース関数 $f_P : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ を適当に選び、写像 $\theta_{P,\eta} : T(\mathbb{R}^2) \to \mathbb{C}$ を

$$\theta_{P,\eta}(x) = f_P(x) + i\eta df_P(x)(u) - \frac{1}{2}\eta^2\chi(x)H_{f_P}(x)(u,u)$$

で定義する。ここで、η は十分小さい正の実数、$\chi(x)$ は f_P のモース特異点の微小近傍における bump 関数、H_{f_P} はヘッシアンである。A'Campo は divide の曲線が連結な場合、偏角写像 $\theta_{P,\eta}/|\theta_{P,\eta}| : ST(\mathbb{R}^2) \setminus L(P) \to S^1$ が局所自明なファイバー束であり、そのモノドロミーは正のデーン捻りの積で表されることを示した。さらに、divide の曲線が平面曲線孤立特異点の実モース化で得られる曲線と一致している場合には、divide のファイバー束はその特異点のミルナー束と同値となることを示した。よって、divide とそのファイバー束は、平面曲線孤立特異点とそのミルナー束の一般化になっている。

結び目理論において、ファイバー絡み目のファイバー曲面は、Hopf plumbing とその逆操作 Hopf deplumbing により特徴付けられる。Hopf plumbing とは、Hopf band を貼り付ける操作であり、Hopf band の捻りの向きに正負があるため、positive Hopf band の plumbing と negative Hopf band の plumbing がある。J. Harer は全てのファイバー絡み目のファイバー曲面が円盤に Hopf plumbing、Hopf deplumbing、twisting の 3 操作を繰り返し行うことで構成できることを示した。彼はさらに 3 操作のうち 2 つしか必要ないのでは、という問題提起をし、実際、近年 E. Giroux が Hopf plumbing、Hopf deplumbing の 2 操作ですべてのファイバー絡み目の曲面が得られることを証明した。

Divide のファイバー曲面に関する自然な問題として、ファイバー曲面がどのような plumbing により得られるか、という問題が生じる。M. Hirasawa は divide のファイバー曲面が円盤から positive Hopf band の plumbing と deplumbing を繰り返すことで得られることを証明した。このような場合、「ファイバー曲面は stable positive Hopf plumbing である」という言い方をする。ファイバー曲面が円盤から positive Hopf band の plumbing のみを繰り返すことで得られる場合は、「ファイバー曲面は positive Hopf plumbing である」と言う。

本論文の前半では以下のことを証明する。

定理 1. Divide のファイバー曲面は positive Hopf plumbing である。

特に、先程述べたように、divide のファイバー束はミルナー束の一般化であるので、次のことが言える。

系 2．平面曲線孤立特異点のミルナー束のファイバー曲面は positive Hopf plumbing である。

定理１の証明は divide の曲線を使ってファイバー曲面を幾何的に理解するという手法を用いる。特に、Hopf plumbing で貼り付けられる各々の Hopf band は、関数 $\theta_{P,\eta}$ のモース特異点と１対１に対応している。

本論文の後半では、divide とそのファイバー束の構成を向き付けられたコンパクトな曲面 $\Sigma_{g,n}$ 上に描かれた divide へと拡張する。ここで $g \geq 0$ は曲面の種数 (genus) であり、$n \geq 0$ は境界成分の数である。ファイバー束は、$\Sigma_{g,n}$ の接円束から境界の各点上の接円を１点に潰す (zipping) ことにより得られる多様体に構成される。ここではその多様体を $\partial N_\varepsilon(\Sigma_{g,n})$ と書く。

P を $\Sigma_{g,n}$ 上の divide とする。そのリンクは $\partial N_\varepsilon(\Sigma_{g,n})$ 内に構成され、円盤上の divide のリンクのときと同様に、P の接ベクトルを使って定義される。定理を述べるためには、admissible という条件を必要であるが、ここでは述べないことにする。本論文の後半では以下のことを証明する。

定理 3．P を admissible な divide とする。このとき多様体 $\partial N_\varepsilon(\Sigma_{g,n})$ は P のリンクをバインディングとする正オープンブック分解を持つ。

ここでオープンブック分解が正であるとは、モノドロミー写像が正のデーン捻りの積で表される場合を指す。

定理３を証明するためには、Lefschetz 束の分解を用いる。この手法は A'Campo が円盤上の divide のファイバー束の存在証明に使った手法とは全く異なるものであり、Lefschetz 束の分解そのものがモノドロミー写像のデーン捻りの積への分解に対応しているため、ファイバー束の存在証明、及び、モノドロミー写像の特徴付けを明解に行うことができる。特に、この手法は A'Campo の手法では扱えない「divide の曲線が $\Sigma_{g,n}$ の境界と交わらない場合」でも有効である。

定理３と、$\partial N_\varepsilon(\Sigma_{g,n})$ 内の任意のリンクに対しその regular front が存在するという事実から、$\partial N_\varepsilon(\Sigma_{g,n})$ 内の任意のリンクに対し、それに沿った正オープンブック分解が存在することが示せる。

定理 4．$\partial N_\varepsilon(\Sigma_{g,n})$ 内の任意のリンク L に対し、ある結び目 K で、$L \cup K$ が $\partial N_\varepsilon(\Sigma_{g,n})$ の正オープンブック分解のバインディングになるものが存在する。

なお、$g = 0$ かつ $n = 1$ の場合については円盤上の divide 理論の応用として W. Gibson と筆者により同様の手法を用いて証明されている。